



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le 10/07/2013 par :

JEAN-BAPTISTE LAURENT

**Raffinements locaux auto-adaptatifs dans une méthode Galerkin
discontinu pour la résolution des équations de Maxwell**

JURY

STÉPHANE LANTERI

Directeur de Recherches - INRIA

Membre du Jury

CLAIRE SCHEID

Sophia-Antipolis
Maitre de Conférences - INRIA

Membre du Jury

JULIEN DIAZ

Sophia-Antipolis
Chargé de recherche - Université
de Pau

Membre du Jury

MOHAMED MASMOUDI

Professeur - Université Paul

Président du Jury

PIERRE-ALAIN MAZET

Sabatier de Toulouse
Professeur émérite

Membre invité

École doctorale et spécialité :

MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées

Unité de Recherche :

Onera de Toulouse - Département Électromagnétique et Radar

Directeur(s) de Thèse :

Xavier FERRIERES et Vincent MOUYSET

Rapporteurs :

Philippe HELLUY et Séraphin MEFIRE

Rien ne vaut la recherche lorsqu'on veut trouver quelque chose.

J. R. R. Tolkien

Mieux vaut voyager plein d'espoir que d'arriver au but.

Proverbe japonais

Si l'idée n'est pas a priori absurde, elle est sans espoir.

Albert Einstein

Remerciements

Entre le moment où j'ai compris qu'il valait mieux que je me consacre aux mathématiques et les dernières retouches apportées à ce mémoire de thèse, il aura fallu le concours de plusieurs personnes. Le plus délicat sera de n'oublier aucun nom, car les années ont passé et le temps a fait son œuvre.

Je remercie le Département Electromagnétisme et Radar de l'Onera de Toulouse de m'avoir accueilli pendant ces quatre années de recherche.

Il me faut bien évidemment exprimer tous mes remerciements à mes directeurs encadrants de thèse, Xavier Ferrieres et Vincent Mouysset, qui m'ont fait confiance pour cette thèse après mon stage de fin d'études et qui m'ont laissé juste assez de liberté pour avancer dans le bon sens sans perdre trop de temps. Si la collaboration ne fut pas sans heurts, nos discussions auront néanmoins été fructueuses et permis de découvrir et d'appréhender toutes les difficultés rencontrées.

Je remercie également mes deux rapporteurs de thèse, Philippe Helluy et Séraphin Mefire, d'avoir bien voulu se plier à l'exercice de relecture de ce manuscrit et de l'avoir fait avec autant de bienveillance et de rapidité, malgré un calendrier chargé. Merci aussi aux membres de mon jury, Mohamed Masmoudi qui a accepté au pied levé d'en faire partie et qui en a été désigné président, Stéphane Lanteri, Julien Diaz et Claire Scheid d'avoir accepté de juger ce travail, de l'intérêt qu'ils y ont porté et de leurs judicieuses remarques sur les points que j'ai pu soulever. Merci enfin à M. Pierre Mazet, membre invité de mon jury de thèse qui a également contribué à ce que celle-ci démarre sous les meilleures augures.

J'en profite pour saluer Sébastien Pernet, qui a suivi de loin les travaux que je menais à la suite de ses propres travaux de thèse. C'est parce qu'il s'est penché sur la question avant moi que j'ai pu mieux appréhender mon sujet. Je salue également Bernard Pecqueux du CEA de Gramat qui a aussi veillé de loin au bon déroulement de cette thèse.

Je salue aussi les différents doctorants, post-doctorants et ingénieurs du DEMR ou d'ailleurs que j'ai croisé au cours de ces années passées au sein du département : Laura, Brahim, Rudy, Charles, les deux Julien, les deux Benjamin, Christophe, Jérôme, Clément, Nicolas, Thomas... Si nos sujets sont loin de se ressembler, leur regard extérieur m'aura parfois permis de trouver une nouvelle approche sur mes propres recherches qui s'est révélée intéressante.

J'ajoute un petit mot naturellement à toute l'équipe du DEMR : le directeur Florent

Christophe et son enthousiasme indéfectible, Vincent Gobin qui a été d'un grand soutien, et Corinne de Pablo et Claudine Tournon sans qui le département ne tournerait pas.

Enfin, je pense à ma famille, qui m'a toujours soutenu dans mes entreprises et m'a encouragé à en être là où j'en suis aujourd'hui. Je les remercie chacun, aussi nombreux qu'ils soient : mes parents, mes sœurs et mon frère, mes grands-parents et tous les autres qui sont tellement nombreux que j'espère qu'ils ne m'en voudront pas que je les cite un par un. L'éloignement aura pesé lourd ces années durant mais la fierté et la joie de leur présence lors de ma présentation a largement compensé ses quelques sacrifices.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	11
1 Système de Maxwell et schéma Galerkin discontinu	17
1.1 Les équations de Maxwell	17
1.2 Méthode Galerkin discontinue utilisée	20
1.2.1 Formulation équivalente du système de Maxwell	20
1.2.2 Méthode Galerkin discontinue	24
1.2.2.1 Approximation spatiale	25
1.2.2.2 Approximation temporelle	28
1.2.3 Résultats de convergence	29
1.2.3.1 Stabilité du schéma GD3D	29
1.2.3.2 Ordre de convergence du schéma GD3D	33
2 Opérateur d'interpolation de « condition initiale » pour le schéma GD	35
2.1 Étude préliminaire : instabilité de l'adaptation hp en 1D	36
2.1.1 Système de Maxwell et schéma Galerkin discontinu en 1D	36
2.1.2 Illustration du phénomène d'instabilité pour le GD1D	43
2.2 Construction du projecteur adapté au schéma GD1D évolutif	47
2.2.1 Travail préliminaire	48
2.2.1.1 Formulation du schéma GD1D évolutif	48
2.2.1.2 Étude de la stabilité du schéma GD1D évolutif	50
2.2.1.3 Bilan sur les conditions nécessaires sur l'opérateur d'interpolation	54
2.2.2 Proposition d'un opérateur d'interpolation local	55
2.2.2.1 Proposition de l'opérateur d'interpolation local par optimisation	55
2.2.2.2 Caractère bien posé du problème d'optimisation	56
2.2.2.3 Explicitation de l'opérateur	58
2.2.3 Étude de l'opérateur d'interpolation 1D	61
2.2.3.1 Pertinence de l'opérateur d'interpolation 1D	61
2.2.3.2 Contrôle <i>a posteriori</i> de l'erreur d'interpolation 1D	66
2.3 Validation numérique de l'opérateur d'interpolation pour le GD1D	67

2.4	Interpolation de condition initiale adaptée au schéma GD3D évolutif	74
2.4.1	Travail préliminaire	75
2.4.1.1	Formulation et stabilité du schéma GD3D évolutif	75
2.4.1.2	Bilan sur les conditions nécessaires sur l'opérateur d'interpolation	79
2.4.2	Proposition d'un opérateur d'interpolation local 3D	80
2.4.2.1	Proposition de l'opérateur d'interpolation local par optimisation	80
2.4.2.2	Explicitation de l'opérateur	81
2.4.3	Pertinence et contrôle de l'erreur a posteriori de l'opérateur d'interpolation 3D	83
2.4.3.1	Pertinence de l'opérateur d'interpolation 3D	83
2.4.3.2	Contrôle a posteriori de l'erreur d'interpolation 3D	88
2.4.4	Bilan et réflexions sur la stabilité du schéma dans le cas adaptatif	89
3	Utilisation d'espaces d'approximation non-conformes	91
3.1	Méthodes pour l'utilisation d'espaces d'approximation non-conforme	92
3.1.1	Modification du schéma pour la non-conformité en p	92
3.1.2	Modification du schéma pour la non-conformité en h	95
3.1.3	Illustration de l'intérêt des espaces d'approximation non-conformes	96
3.1.3.1	Espace non-conforme en p	97
3.1.3.2	Maillages non conformes en h	101
3.2	Problème lié aux non-conformités et méthode de correction	102
3.3	Construction de la méthode de correction sur modèle TM	106
3.3.1	Présentation du système Maxwell TM et schéma GD2D	106
3.3.2	Illustration de la problématique avec le schéma GD2D	109
3.3.3	Construction de la méthode	113
3.3.3.1	Expressions matricielles préliminaires	113
3.3.3.2	Non-conformités en p	114
3.3.3.3	Non-conformité en h sur une face	118
3.3.3.4	Non-conformité en h et/ou p sur une face	122
3.3.4	Points restants et corollaires	126
4	Stratégie de maillage auto-adaptatif	127
4.1	Éléments bibliographiques en relation avec l'adaptation de maillage	128
4.1.1	Estimation d'erreur a posteriori	128
4.1.2	Adaptation de maillage	129
4.2	Estimation a posteriori de l'erreur numérique	131
4.2.1	Estimateur d'erreur a posteriori utilisé pour le schéma GD3D	131
4.2.2	Validation de l'estimateur pour le problème dynamique sur un cas simplifié 1D	134
4.3	Évaluation d'une stratégie d'adaptation de maillage	140
4.3.1	Éléments de références	144
4.3.2	Mise en œuvre d'un algorithme d'adaptation de maillage	146
4.3.3	Étude paramétrique	154
4.3.3.1	Influence de la nature des flux utilisés	155
4.3.3.2	Étude des temps de calculs	158
4.3.3.3	Étude du paramètre d'erreur	160

4.3.3.4	Étude des causes de l'hystérésis	166
4.3.3.5	Bilan et pistes d'améliorations	176
Conclusion et perspectives		177
Bibliographie		181

Introduction

L'étude de la propagation d'ondes est un sujet d'études prolifique depuis une cinquantaine d'années. Les domaines d'application sont nombreux et très variés, comme la compatibilité électromagnétique (CEM) ou l'étude du comportement des systèmes électroniques soumis à une agression électromagnétique et les perturbations induites. Cette tâche contraignante doit être faite au moment de la conception du dispositif, dans le respect des normes en matière de CEM, afin de garantir le bon fonctionnement de l'objet une fois dans l'environnement électromagnétique. Les analyses et simulations numériques sont donc un moyen de grande importance dans cette tâche. Dans le cadre CEM, nous nous attacherons au calcul des champs électrique et magnétique dans un domaine proche des structures, pour des spectres à large bande. Pour cela, nous choisissons de travailler préférentiellement dans le domaine temporel. Plus précisément, notre travail portera sur la résolution numérique du système différentiel de Maxwell qui régit le comportement des ondes électromagnétiques en espace et en temps.

De nombreuses méthodes de calcul dans le domaine temporel existent. Nous ne regarderons que les méthodes dites « *full wave* » et délaisserons les méthodes asymptotiques car présentant moins d'atout pour l'étude fine exigée en CEM.

Encore actuellement, parmi les méthodes « *full wave* », la méthode la plus courante pour la résolution des équations de Maxwell est le schéma de Yee [97]. Développé en 1966, il se base sur une approximation de type différences finies sur une grille cartésienne spatiale avec un schéma *leap-frog* en espace et en temps. De par sa construction, il possède une erreur de consistance d'ordre 2. Simple à mettre en œuvre, il donne un schéma explicite en temps peu coûteux. Cependant, la méthode s'avère pénalisante pour la prise en compte de la géométrie, car elle impose une approximation en marches d'escalier qui est source d'erreur sur des objets courbes. De plus, l'approximation de détails de petite échelle entraîne nécessairement un maillage fin et une multiplication des cellules pour conserver la conformité du maillage. Ceci induit une augmentation de l'erreur de dispersion, du fait d'un pas de temps très petit pour satisfaire la condition de stabilité CFL [26].

De nombreux travaux ont été menés par la suite pour améliorer la qualité de la solution en ordre, en utilisant des techniques de post-traitement [61] ou de schémas de calcul d'ordre supérieur [42, 46], sans toutefois contourner le problème de raffinement du maillage sur une grille cartésienne pour s'approcher de la géométrie.

Du point de vue des applications CEM, le respect de la géométrie pouvant être un point crucial, on préfère alors s'orienter pour l'étude de phénomènes fins vers des méthodes s'ap-

puyant sur un maillage qui suit la description des différents éléments. Ainsi, parmi les recherches menées sur les méthodes numériques pour résoudre le problème de Maxwell, les méthodes basées sur des équations intégrales semblent répondre à ce besoin car construites à partir d'un maillage de peau des objets. Elles présentent donc en particulier l'avantage d'utiliser un nombre de degrés de liberté relativement faible (de l'ordre d'un problème 2D) par rapport à une simulation 3D complète. Si cette méthode est extrêmement utilisée dans la résolution des équations de Maxwell fréquentielles, avec des algorithmes performants (*Fast Multipole Method*), le changement de type de singularité du noyau de Green de l'équation des ondes en 3D entre les versions fréquentielle et temporelle induit une plus grande difficulté pour l'obtention d'un schéma numériquement viable (pouvant engendrer des instabilités) dans le cas instationnaire. Pour cette raison, ces méthodes sont assez peu développées et appliquées à des problèmes d'envergure pour les équations de Maxwell instationnaires.

Pour obtenir une bonne approximation des géométries, une autre possibilité serait donc la méthode des éléments finis. En effet, cette méthode permet, contrairement au schéma de Yee, de prendre en compte des détails de la géométrie tout en assurant une meilleure dispersion. Elle présente plusieurs déclinaisons pour son application aux équations de Maxwell liées à un choix effectué pour la prise en compte du noyau de l'opérateur différentiel. Le problème aujourd'hui bien connu se situe dans la nécessité pour l'espace d'approximation de vérifier une condition de type Ladyzenskaja-Babuška-Brezzi (permettant alors de retrouver le lemme de Céa). Deux familles de schémas bien connues sont ainsi, par exemple, les méthodes de pondération du système par ajout d'une contrainte de pénalisation lagrangienne construite à partir du noyau [8, 9, 51], et les schémas éléments finis avec fonctions de base adaptées à l'opérateur telles que celles de Nédélec [75, 76]. Toutefois, même si ces méthodes permettent d'augmenter la précision des calculs en introduisant des fonctions de base d'ordres élevés, elles peuvent alors engendrer un coût de résolution important (assemblage et inversion de matrices de masse) et surtout elles ne permettent pas le suivi fin de discontinuités. Pour ce faire, les fonctions de base n'étant pas définies de manière complètement locale à l'élément, il peut être difficile d'introduire des gestions de niveaux de précision différents en espace en fonction de besoins locaux spécifiques.

Enfin, la dernière famille de schémas que nous considérons est celle bâtie à partir d'approximations locales sur chaque élément où ceux-ci sont connectés par des termes d'échanges aux interfaces appelés flux. Parmi celles-ci, la première est la méthode des volumes finis qui est construite à partir de fonctions de base constantes par morceaux sur chaque élément du maillage [88, 85]. Le schéma étant décrit cellule par cellule, il n'impose que des conditions sur les flux et leurs calculs, et permet l'utilisation de maillages non structurés et/ou non conformes. Par ailleurs, il offre une gestion simple des discontinuités de coefficients dans le système décrivant par exemple des objets assemblés à partir de matériaux ayant des constantes électromagnétiques (permittivité, perméabilité et conductivité) différentes. Toutefois, si la méthode permet de prendre en compte les singularités de la solution, elle demeure cependant d'ordre faible du fait de sa forte dispersion. Aussi, des palliatifs ont été apportés permettant d'améliorer l'ordre du schéma, comme la méthode MUSCL, mais restent assez contraignants.

Finalement, pour éviter outre les difficultés de la méthode volumes finis, il faudrait pouvoir passer des fonctions de base constantes par cellule à des fonctions de degré plus élevé. La méthode Galerkin discontinu convient alors davantage. Elle peut être comparée à une approche volumes finis (calcul des flux numériques entre chaque cellule du maillage) mais avec une approximation polynomiale de la solution par cellule, et non plus constante par

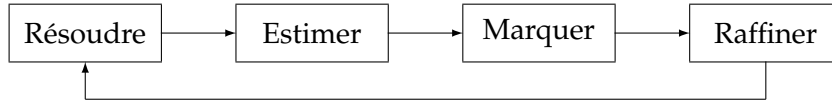
morceaux. Sa souplesse, sa simplicité de mise en place et la littérature abondante à son sujet en font un candidat séduisant [52, 6], qui fait l'objet de plusieurs applications récentes dans un cadre similaire [68, 74] et auquel le département DEMR de l'Onera s'est naturellement intéressé [45, 35, 44, 92, 71]. Il apparaît néanmoins que l'emploi d'une telle méthode a un coût certain en termes de calculs et de ressources mémoire. Ceci peut être contourné par une approche locale et un choix judicieux de fonctions de base adapté à chaque cellule [81].

Par rapport aux problématiques qui nous intéressent et aux méthodes numériques existantes, nous nous orientons donc plutôt vers le développement en Galerkin discontinu. De plus, de par sa construction complètement locale, nous voyons que ce schéma présente des possibilités d'améliorations telles que l'utilisation de raffinements locaux de maillage ou de modifications d'ordre par cellule qui peuvent être introduites de manière « naturelle ». En effet, l'un des problèmes liés à la simulation en électromagnétisme tient dans la dépendance directe entre les paramètres du maillage (taille des cellules) et la longueur d'onde minimale λ_{\min} du signal qui se propage. En pratique, la taille maximale admissible des cellules du maillage est généralement donnée par une fraction de λ_{\min} afin de conserver une bonne précision du calcul. Ainsi, parmi les demandes industrielles, il apparaît le besoin de travailler sur des problèmes pour des fréquences de plus en plus hautes, il convient alors d'utiliser des maillages constitués de cellules très petites pour une bonne précision. Toutefois, utiliser un maillage global très fin peut s'avérer extrêmement coûteux voire rédhibitoire pour la réalisation de la simulation numérique alors que le besoin réel en cellules fines pourrait être confiné à une zone prédéterminée de l'espace (par exemple dans un voisinage d'une source haute fréquence à décroissance très rapide, ou encore si une partie du domaine est isolée de la source haute fréquence). D'un autre côté, si on souhaite étudier un problème de fréquence plus faible, la taille maximale de cellule deviendrait trop large pour tenir compte correctement de la géométrie des obstacles de la scène. Il apparaît donc dans ces exemples l'intérêt d'utiliser un maillage présentant différentes échelles de raffinement, de sorte qu'il permette un bon équilibre entre précision *a priori* et coût mémoire.

Un autre exemple physique de problématique rencontrée en liaison avec la finesse du maillage est la prise en compte de fortes variations dans la solution, causées par des fentes minces ou des rugosités à la surface des objets. Dans ce cas, pour réaliser la capture du phénomène physique au voisinage de cet obstacle, il est *a priori* nécessaire de fixer des pas de maillages très fins qui, s'ils sont utilisés sur l'ensemble de la scène à décrire, engendreront encore une fois des surcoûts potentiellement rédhibitoires pour la menée à bien de la simulation numérique. La pratique montre alors qu'il est préférable d'utiliser un maillage fin d'ordre peu élevé afin d'obtenir une bonne approximation du problème avec un raffinement local des cellules. À l'inverse, pour un domaine sans singularité, nous nous orienterons naturellement vers un maillage plus large en espace avec un ordre plus important. On pourra par exemple citer les travaux de J.F. Rémacle sur ce genre de problèmes [67].

On voit donc à travers ces différents cas que l'utilisation de maillages non-conformes (avec des cellules pouvant ne pas vérifier les hypothèses classiques des éléments finis) qui permettent d'introduire de très forts raffinements locaux ou d'utiliser des ordres d'approximation locaux différents, sont des solutions extrêmement intéressantes pour répondre au problème d'une simulation numérique précise et réalisable. Ainsi la localisation des fonctions de base telle qu'elle est définie dans le schéma Galerkin discontinu nous amène naturellement à envisager l'utilisation de ces deux techniques. Un des objectifs qui nous intéresseront dans ce mémoire sera donc de proposer une méthode permettant de les mettre en œuvre sur ce schéma.

Afin de pouvoir utiliser les solutions d'adaptation locale précédemment introduites, il nous faut encore pouvoir déterminer les différentes zones d'intérêt dans le domaine de calcul. Par ailleurs, du fait que le signal évolue de cellule en cellule, il modifie conjointement les besoins en précision. Ainsi, un maillage dont on aura par avance raffiné une zone de calcul ne sera plus adapté à la forme de la solution une fois que celle-ci se sera propagée et, à l'inverse, une partie du maillage traitée moins finement parce qu'initialement éloignée du signal entraînerait une perte de précision si non raffinée au passage de ce dernier. Il sera donc intéressant d'envisager la possibilité d'adapter le maillage de façon dynamique au cours du calcul. Le choix d'une résolution par une méthode Galerkin discontinu nous invite à étudier une approche de maillage adaptatif *hp*. La structure type d'un tel algorithme se décompose en quatre modules, donnés dans [98, 72, 73], comme suit :



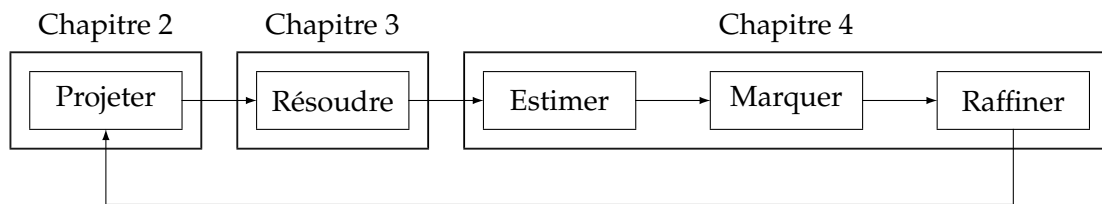
Chacune des étapes représente une opération spécifique qui sera éventuellement menée plusieurs fois à chaque itération dans l'algorithme d'adaptation de maillage. Le point « Résoudre » consiste simplement en une résolution de l'équation d'avancée en temps, permettant le calcul d'une solution u^{n+1} à partir des valeurs de u^n . Nous obtenons à l'issue de celle-ci un premier candidat pour u^{n+1} . L'étape « Estimer » donne une estimation de l'erreur commise entre le candidat u^{n+1} calculé et la solution exacte au temps correspondant. L'objectif pour les besoins en précision est de localiser les endroits du maillage nécessitant des raffinements afin d'obtenir une approximation de la solution plus fine, ou, à l'inverse, repérer les cellules du domaine de calcul où l'espace d'approximation pourrait être allégé afin de ne pas entraîner un surcoût inutile. La partie « Marquer » porte sur la désignation des cellules dont il faudra modifier l'espace d'approximation afin d'espérer améliorer le compromis précision/stockage mémoire. Il vient ainsi la définition d'un nouvel espace d'approximation. L'étape « Raffiner » effectue le raffinement ou déraffinement en ordre ou en maillage conformément au marquage précédent et construit l'espace défini par « Marquer ». À l'issue de cette dernière étape, nous utilisons ce nouvel espace d'approximation pour calculer un nouveau candidat u^{n+1} par « Résoudre » et ainsi de suite. L'algorithme s'arrête si « Estimer » renvoie une valeur de l'évaluation de l'erreur inférieure à un seuil prédéfini ou si « Raffiner » est dans l'impossibilité de proposer une amélioration, conformément au résultat de « Marquer », dans la description de l'espace. La valeur du dernier candidat u^{n+1} est alors validée et on passe ainsi, à partir de cette valeur obtenue, au calcul de la nouvelle inconnue u^{n+2} .

Nous sommes donc intéressés par transposer cette méthodologie au cas de la simulation instationnaire. Un point naturel à regarder est alors l'adaptation à notre cas des trois étapes que l'on introduit pour créer l'algorithme auto-adaptatif (« Estimer, Marquer, Raffiner »). Celles-ci présentent alors deux différences potentiellement majeures par rapport au cas statique : la définition de l'estimateur d'erreur *a posteriori* sur un schéma instationnaire et l'influence des différents paramètres propres aux deux dernières étapes. Une première difficulté réside dans l'absence d'estimateur d'erreur *a posteriori* instationnaire. Toutefois, au vu de la richesse actuelle des méthodes de construction de tels outils dans le cas stationnaire,

il est possible d'envisager l'utilisation de ces outils dans notre cas [57]. S'ensuivent alors la question de l'adaptation des choix des paramètres d'entrée pour les étapes « Marquer » et « Raffiner » en accord avec « Estimer » et la pertinence du processus de construction de l'espace d'approximation par rapport à des enjeux liés à la simulation instationnaire. En particulier, nous sommes intéressés par les questions de temps de calcul car le surcoût introduit dans l'algorithme pour un schéma stationnaire se trouvera multiplié par le nombre d'itérations en temps dans le cas instationnaire. Cette augmentation des temps de résolution peut alors devenir un critère rédhibitoire pour la mise en œuvre pratique de cette stratégie [24, 79, 54]. Par ailleurs, de par sa construction, une des spécificités de la résolution de schéma en temps porte sur le caractère séquentiel de l'obtention de la solution. Ainsi, pour calculer la valeur de u^{n+1} , on se sert des valeurs de u^n , mais si on envisage l'algorithme d'adaptation de maillage au cours du temps, il apparaît alors que u^n et u^{n+1} sont évaluées sur deux espaces d'approximation *a priori* différents. Par conséquent, le schéma présenté voit apparaître une cinquième étape, notée « Projeter », préalable à « Résoudre », qui consiste à transporter les valeurs de u^n de l'espace sur lequel elles sont définies vers celui utilisé pour le calcul de u^{n+1} . Donc, pour la mise en place de notre stratégie, il est nécessaire de proposer une méthode permettant de réaliser cette cinquième étape tout en continuant à garantir la convergence du schéma [60, 19, 16, 15]. Enfin, le cadre d'application que nous avons choisi (schéma Galerkin discontinu pour les équations de Maxwell) nous incite à définir, au travers de l'étape « Raffiner », des espaces non-conformes en maillage ou à ordre variable qui seront alors la base de l'étape « Résoudre ». Il faut alors pouvoir définir une modification éventuelle du schéma compatible avec cette donnée.

Plan du mémoire

En accord avec les points mis en avant précédemment, nous allons donc dans ce manuscrit étudier chacun de ces éléments séparément. Le document se décompose alors en quatre chapitres dont la structure peut être résumée en reprenant le schéma du raffinement auto-adaptatif de la manière suivante :



Nous présentons donc dans les différents chapitres les propriétés et études précisées ci-après :

Chapitre 1 : Le premier chapitre introduit le système de Maxwell dans le domaine temporel qui décrit les phénomènes électromagnétiques que nous souhaitons simuler. Nous rappelons le schéma Galerkin discontinu utilisé. En particulier, nous revenons sur la construction de ce schéma et nous reprenons la démonstration de la stabilité et l'obtention de la condition CFL qui seront reconsidérées par la suite pour la définition et l'étude mathématique de l'opérateur réalisant l'étape « Projeter ».

Chapitre 2 : Le deuxième chapitre commence par mettre en avant sur un exemple simplifié en 1D qu'un mauvais choix de méthode d'interpolation (correspondant à l'étape « Projeter ») peut causer une instabilité numérique même en vérifiant une contrainte CFL. Pour comprendre ce phénomène, nous reprenons l'étude théorique du schéma sur le modèle simplifié 1D en soulevant l'impact du changement d'espace d'approximation au cours de la résolution. On en déduit alors des contraintes à vérifier pour garantir la convergence du schéma GD dans le cadre évolutif. Un opérateur permettant de réaliser l'étape de projection, appelé opérateur d'interpolation de « condition initiale », est défini et nous démontrons qu'il satisfait asymptotiquement, lorsque le résidu de sa construction tend vers 0, les conditions précédemment proposées. Nous montrons de plus l'existence d'une estimation *a posteriori* optimale pour l'erreur de consistance introduite par cet opérateur sous une condition CFL explicite. La validation numérique de cet opérateur est alors effectuée en reprenant les exemples initiaux. Partant de ces travaux, nous reprenons l'étude de la stabilité du schéma GD en 3D pour définir un opérateur d'interpolation de « condition initiale » associé, dont nous démontrons à nouveau qu'il vérifie asymptotiquement les propriétés de consistance et stabilité. Enfin, de cette étude, il sort l'explicitation d'une condition CFL évoluant suivant les changements d'espace d'approximation au cours du calcul.

Chapitre 3 : Le troisième chapitre s'intéresse à la gestion dans le calcul de maillages et/ou d'ordres d'approximation non-conformes. Nous explicitons alors la mise en œuvre du schéma dans chacun de ces deux cas. Toutefois, ce type de configurations pouvant amener à l'apparition d'ondes parasites, nous proposons alors la construction d'une méthode de « correction » pour éviter ces phénomènes. L'idée est de se ramener à des espaces de résolution conformes en h et en p (c'est-à-dire présentant le même espace de traces de part et d'autre de la frontière d'une cellule) mais sans modifier la définition des fonctions de base de notre schéma. Pour ce faire, nous montrons qu'il est possible d'effectuer le calcul dans l'espace non-conforme puis, par une projection adaptée, de retrouver la solution sur le sous-espace conforme correspondant. Afin d'explicitier entièrement la construction de cet opérateur, nous nous ramenons à l'étude d'un cas simplifié en deux dimensions avec les équations de Maxwell en mode Transverse Magnétique pour un schéma Galerkin discontinu présentant des inconnues localisées sur les frontières et donc permettant d'isoler les inconnues nécessitant un traitement particulier. L'opérateur de « correction » est alors construit pour les cas de non-conformités en p , en h et en $h - p$.

Chapitre 4 : Le quatrième chapitre s'intéresse à la définition d'une stratégie d'adaptation de maillage dans le cas instationnaire et traite plus particulièrement du choix de l'estimateur et de l'influence des différents paramètres sur l'algorithme de raffinement / dé-raffinement. Il commence par une bibliographie sur chacun de ces points. Dans un premier temps, nous rappelons sommairement la construction de l'estimateur *a posteriori* statique développé pour le schéma GD que nous utilisons et nous effectuons une rapide validation numérique de celui-ci sur un exemple 1D. Dans la seconde partie, nous détaillons la mise en œuvre dans ce même cadre d'une stratégie d'adaptation automatique où nous introduisons des éléments de localisation des recalculs. Nous effectuons alors une étude paramétrique portant sur les questions de précision et de coûts de la méthode en mettant en évidence un phénomène d'hystérésis pour lequel nous essayons d'évaluer l'impact des différents paramètres. Enfin, de cette étude paramétrique, nous en déduisons des problèmes spécifiques liés à la mise en œuvre de l'auto-adaptation instationnaire et nous mettons en avant quelques éléments susceptibles d'amener une amélioration nette de cette stratégie.

Système de Maxwell et schéma Galerkin discontinu

Le but de ce chapitre est de donner le formalisme mathématique ainsi que l'approximation numérique du problème physique avec lequel nous allons travailler tout au long de cette thèse. Pour cela, nous présentons de façon succincte les équations de Maxwell qui permettent de décrire les phénomènes électromagnétiques dans un milieu, en précisant la prise en compte des matériaux et les conditions d'interface entre ceux-ci.

Nous faisons ensuite un bref rappel sur l'existence et l'unicité de solutions au problème de Maxwell, avant de nous intéresser à son approximation par un schéma Galerkin discontinu en espace et un schéma *leap-frog* en temps, dont nous rappellerons la stabilité et la consistance.

1.1 Les équations de Maxwell

Dans cette section, nous introduisons le système instationnaire de Maxwell, et rappelons quelques propriétés et résultats mathématiques sur l'existence et l'unicité de solutions, ainsi que des propriétés de régularité de la solution.

Le système de Maxwell

Soit un milieu quelconque Ω de \mathbb{R}^3 . Dans ce milieu, les phénomènes électromagnétiques sont décrits par quatre grandeurs vectorielles dépendant du temps t et du point de l'espace \mathbf{x} . Ces grandeurs sont :

- le champ électrique $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$;
 - l'induction électrique $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$;
 - le champ magnétique $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$;
-

– l'induction magnétique $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$.

Elles sont reliées par le système d'équations aux dérivées partielles, appelé équations de Maxwell [36] :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{D} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} = 0, & \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, & \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, & \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où \mathbf{J} et ρ représentent, respectivement, des densités de courant électrique et de charge dans le milieu Ω . Les quatre équations du système de Maxwell sont aussi connues, respectivement, sous le nom d'équations de Maxwell-Ampère, Maxwell-Faraday, Maxwell-Gauss et enfin Maxwell-Thomson.

Les valeurs d'inductions s'écrivent aussi, dans le cas d'un matériau non magnétique et sans charges électriques :

$$\mathbf{D} = \bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) \mathbf{E} \text{ et } \mathbf{B} = \bar{\mu}(\mathbf{x}) \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

où $\bar{\varepsilon}(\mathbf{x})$ et $\bar{\mu}(\mathbf{x})$ sont deux tenseurs symétriques définis positifs qui représentent, respectivement, la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du milieu. Dans un milieu isotrope, ces valeurs tensorielles se ramènent à $\varepsilon(\mathbf{x})I_3$ et $\mu(\mathbf{x})I_3$ où I_3 est la matrice unité de \mathbb{R}^3 et $\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$, des scalaires qui vérifient $\varepsilon(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) = 1/c^2(\mathbf{x})$ avec $c(\mathbf{x})$ définissant la vitesse des ondes dans le milieu. Dans le vide, les valeurs de $\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ sont des constantes, qu'on notera respectivement ε_0 et μ_0 . La vitesse de la lumière pour ces valeurs sera notée c_0 , on peut alors définir pour un milieu donné une permittivité et une perméabilité relatives données respectivement par $\varepsilon_r(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})/\varepsilon_0$ et $\mu_r(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})/\mu_0$.

À partir des valeurs de permittivité et perméabilité d'un milieu, on peut aussi définir son impédance $Z(\mathbf{x}) = \sqrt{\mu(\mathbf{x})/\varepsilon(\mathbf{x})}$ et son inductance $Y(\mathbf{x}) = 1/Z(\mathbf{x})$. Comme on le verra dans la suite de ce chapitre, ces quantités jouent un rôle important dans les termes de sauts de la méthode Galerkin discontinue utilisée pour résoudre numériquement notre problème.

D'autre part, à partir du système de Maxwell (1.1), on peut montrer que les quantités \mathbf{J} et ρ vérifient l'équation de conservation des charges :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.3)$$

Pour cela, il suffit de dériver l'équation de Maxwell-Gauss par rapport au temps et de prendre la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère.

Un milieu conducteur est représenté par un tenseur de conductivité $\bar{\sigma}(\mathbf{x})$ tel que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_s, \quad (1.4)$$

où \mathbf{J} définit un courant de conduction et \mathbf{J}_s est un terme de source électrique. Dans un milieu isotrope, $\bar{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})I_3$ où $\sigma(\mathbf{x})$ est un scalaire. Pour un milieu non conducteur, comme le vide, cette valeur est nulle.

En reportant les relations (1.2) et (1.4) dans (1.1), les équations de Maxwell se mettent alors sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s = 0, & \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega, \\ \mu \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, & \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

En absence de charges ($\rho = 0$) et sous la condition $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, les deux équations $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$ et $\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0$ ne sont plus considérées car elles sont redondantes. En effet, on peut remarquer que ces deux équations sont vérifiées à partir du système (1.5), en prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Faraday et la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère et en supposant que les valeurs de la divergence des champs électriques et magnétiques sont nulles à $t = 0$. Le système (1.5) sera celui étudié par la suite.

Conditions au bord

Dans le cas où Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^3 , il faut adjoindre au système (1.5) des conditions sur le bord du domaine noté $\partial\Omega$. En notant \mathbf{n} la normale au bord sortante à Ω , les conditions physiques usuelles que nous utiliserons sont les suivantes :

- conducteur électrique parfait : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$,
- conducteur magnétique parfait : $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$,
- condition d'impédance : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} + Z \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$ pour $Z \geq 0$,
- condition d'admittance : $\mathbf{n} \times \mathbf{H} - Y \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ pour $Y \geq 0$,
- condition de radiation de Silver-Müller : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} + \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$.

La condition de Silver-Müller décrit le comportement d'une onde à l'infini et est souvent utilisée comme condition absorbante approchée pour simuler sur un domaine borné la propagation d'une solution en espace libre.

Rappel d'un résultat d'existence et d'unicité

Nous supposons que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de bord de classe \mathcal{C}^1 , et on introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) / \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \text{ où } \mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^3.$$

Si Ω est un domaine borné lipschitzien, on peut alors définir (dans un espace de distributions) la trace tangentielle de toute fonction \mathbf{u} de $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \gamma_\tau : \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) &\longrightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ \mathbf{u} &\longmapsto \gamma_\tau(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

γ_τ est une application linéaire continue de $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ [25]. Nous pouvons aussi définir le sous-espace $\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ de $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ par : $\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \text{Ker}(\gamma_\tau)$.

Le problème (1.5) devient alors : trouver $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega))$, vérifiant

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s = 0 \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \mu \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega, \\ \mathbf{E}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{H}(0, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (1.6)$$

Afin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de notre problème d'évolution (1.6), nous devons faire les hypothèses suivantes sur les différents tenseurs présents dans celui-ci :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\bar{\epsilon}}, \bar{\bar{\mu}}, \bar{\bar{\sigma}} \in [L^\infty(\Omega)]^{3 \times 3}, \\ \epsilon_{\min} I_3 \leq \bar{\bar{\epsilon}}(\mathbf{x}) \leq \epsilon_{\max} I_3 & \text{pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mu_{\min} I_3 \leq \bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x}) \leq \mu_{\max} I_3 & \text{pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 \leq \bar{\bar{\sigma}}(\mathbf{x}) \leq \sigma_{\max} I_3 & \text{pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega, \end{array} \right. \quad (1.7)$$

où $\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}, \mu_{\min}, \mu_{\max} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma_{\max} \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 1.1 Dans ces hypothèses, la notation « \leq » correspond à la relation d'ordre définie par $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\epsilon_{\min} \|\mathbf{v}\|^2 \leq \langle \bar{\bar{\epsilon}}(\mathbf{x}) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq \epsilon_{\max} \|\mathbf{v}\|^2.$$

avec $\|\cdot\|$ désignant la norme ℓ^2 .

Sous ces hypothèses nous avons alors le théorème suivant [23] :

Théorème 1.2 Si $\mathbf{J}_s \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ et en supposant les hypothèses (1.7) satisfaites, alors il existe une solution unique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) du problème (1.6) vérifiant :

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)). \quad (1.8)$$

1.2 Méthode Galerkin discontinue utilisée

L'objet de cette section est la présentation de la méthode de type Galerkin discontinu (GD) utilisée pour la résolution du système de Maxwell dans le domaine temporel. Tout d'abord, nous établissons une formulation équivalente au problème de Maxwell (1.6) en écrivant les continuités tangentielles des champs électriques et magnétiques entre les cellules du maillage sous forme de sauts [81].

1.2.1 Formulation équivalente du système de Maxwell

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$. On suppose que le domaine de calcul Ω est subdivisé en un ensemble $\mathcal{T}_h = \{\mathcal{K}_i, i = 1, \dots, N_e\}$ de N_e cellules hexaédriques \mathcal{K}_i telles que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} \mathcal{K}_i$ et $\dot{\mathcal{K}}_i \cap \dot{\mathcal{K}}_j = \emptyset$, pour tous (i, j) vérifiant $1 \leq i \neq j \leq N_e$.

On définit ensuite $\partial\mathcal{T}_h^i$ et $\partial\mathcal{T}_h^e$ comme étant respectivement l'ensemble des faces internes et des faces frontières au domaine Ω , par :

$$\partial\mathcal{T}_h^i = \{\Gamma / \exists (\mathcal{K}, \mathcal{K}') \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h, \mathcal{K} \neq \mathcal{K}', \Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'\},$$

$$\partial \mathcal{T}_h^e = \{\Gamma / \exists \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \Gamma = \mathcal{K} \cap \partial \Omega\}.$$

Remarque 1.3 Contrairement à d'autres méthodes, comme les éléments finis, nous n'exigeons pas la coïncidence nodale dans le maillage dans une approche Galerkin discontinu. Il deviendra ainsi possible d'utiliser et de mener des calculs sur des maillages non conformes.

Introduction des termes de sauts

Pour cette méthode Galerkin discontinu on introduit des termes de pénalisation sur les sauts tangents au niveau des interfaces de $\partial \mathcal{T}_h^i$. Par convention, on se donne deux cellules adjacentes, dont les champs de part et d'autre de l'interface commune sont notés (E^1, H^1) et (E^2, H^2) et où la normale \mathbf{n} est orientée de ① vers ② comme illustré sur la figure 1.1. On introduit alors [81]

- d'une part des sauts sur la partie trace de l'opérateur de différentiation $[\![\mathbf{n} \times E]\!] = \mathbf{n} \times E^2 - \mathbf{n} \times E^1$ pour la seconde équation de (1.5), et en $[\![\mathbf{n} \times H]\!] = \mathbf{n} \times H^2 - \mathbf{n} \times H^1$ sur la première ;
- et d'autre part des contributions en $[\![\mathbf{n} \times (E \times \mathbf{n})]\!]$ et $[\![\mathbf{n} \times (H \times \mathbf{n})]\!]$, respectivement sur la première et la seconde équation de (1.5), correspondant au décentrement des flux tel qu'on peut le retrouver par exemple en volumes finis [20].

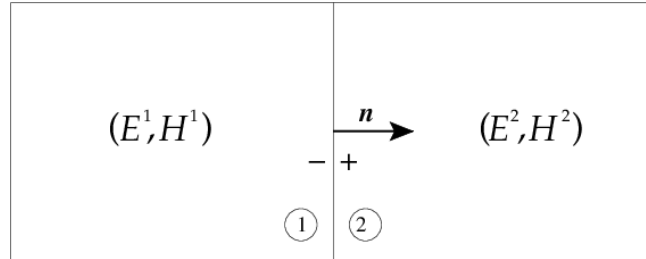


FIGURE 1.1: Orientation des normales entre les matériaux ① vers ②.

Sur chaque cellule \mathcal{K} du maillage, le système (1.5) peut ainsi se mettre sous la forme d'un problème sans conditions limites, dans lequel celles-ci sont introduites comme des termes de pénalisation, et on obtient alors une nouvelle formulation :

$$\begin{cases} \bar{\epsilon} \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} + \bar{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \\ = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{K}} \left(\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_{\Gamma})]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{H} \times \mathbf{n}_{\Gamma}]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \right) \delta_{\Gamma}, \\ \bar{\mu} \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{K}} \left(\gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{E} \times \mathbf{n}_{\Gamma}]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_{\Gamma})]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \right) \delta_{\Gamma}, \end{cases} \quad (1.9)$$

où $\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$, $\beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$, $\gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$, $\chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$ sont des constantes réelles, \mathbf{n}_{Γ} est la normale unitaire à la face Γ sortante de \mathcal{K} et δ_{Γ} la fonction indicatrice de Γ .

Dans l'expression (1.9), $[\![\mathbf{v}]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$ représente le saut de \mathbf{v} à travers une face Γ de la frontière $\partial \mathcal{K}$ qui est défini comme suit :

- si $\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i$, alors $\Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ pour $\mathcal{K}' \in \mathcal{T}_h$, et $[\![\mathbf{v}]\!]_\Gamma = (\mathbf{v}|_{\mathcal{K}'})|_\Gamma - (\mathbf{v}|_{\mathcal{K}})|_\Gamma$;
- si $\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^e$, alors $\Gamma = \mathcal{K} \cap \partial \Omega$ pour $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, et $[\![\mathbf{v}]\!]_\Gamma = -(\mathbf{v}|_{\mathcal{K}})|_\Gamma$.

Il est plus courant d'utiliser la formulation faible de (1.9), afin de vérifier que nous avons un problème bien posé. Nous choisissons ainsi un nouvel espace de fonctions

$$\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h) = \{f / \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, f|_{\mathcal{K}} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{K})\},$$

sur lequel nous écrivons la formulation variationnelle du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t)) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)^2 \text{ tel que } \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \forall (\phi_1, \phi_2) \in [\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)]^2, \\ & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{K}} \bar{\epsilon} \mathbf{E}_{\mathcal{K}} \cdot \phi_{1\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{K}} \nabla \times \mathbf{H}_{\mathcal{K}} \cdot \phi_{1\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}} (\bar{\sigma} \mathbf{E}_{\mathcal{K}} + \mathbf{J}_s) \cdot \phi_{1\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} \\ & = \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{K}} \left(\int_{\Gamma} \alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma})]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \cdot \phi_{1\mathcal{K}} \, ds + \int_{\Gamma} \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{H}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \cdot \phi_{1\mathcal{K}} \, ds \right), \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{K}} \bar{\mu} \mathbf{H}_{\mathcal{K}} \cdot \phi_{2\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}} \nabla \times \mathbf{E}_{\mathcal{K}} \cdot \phi_{2\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} \\ & = \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{K}} \left(\int_{\Gamma} \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \cdot \phi_{2\mathcal{K}} \, ds + \int_{\Gamma} \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{H}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma})]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \cdot \phi_{2\mathcal{K}} \, ds \right), \end{aligned} \right. \quad (1.10) \end{aligned}$$

où $\mathbf{E}_{\mathcal{K}} = \mathbf{E}|_{\mathcal{K}}$, $\mathbf{H}_{\mathcal{K}} = \mathbf{H}|_{\mathcal{K}}$, $\phi_{j\mathcal{K}} = \phi_j|_{\mathcal{K}}$ et ds est l'abscisse curviligne associée à $\partial \mathcal{K}$.

Choix des paramètres

Le choix des coefficients $(\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}})$ doit permettre de retrouver l'équivalence entre le problème de Maxwell initial (1.5) muni de la condition aux limites de type métal parfaitement conducteur et la formulation variationnelle (1.10). Pour cela, nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.4 (Proposition 4, section 4.2 de [81]) *Le problème (1.10) est équivalent au problème de Maxwell (1.6) sous les conditions sur $\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$ suivantes :*

- $\forall \Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \in \partial \mathcal{T}_h^i$, $\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}'}$, $\chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}'}$ et $\beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}'}, \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} \neq 0$,
- $\forall \Gamma \subset \partial \mathcal{K} \in \partial \mathcal{T}_h^e$, $\beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = 0$ et $\gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$ ou $\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \neq 0$.

Remarque 1.5 *D'autres cas de conditions limites sur $\partial \Omega$ s'obtiennent en prenant les coefficients $\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$ et $\gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$, avec \mathcal{K} tel que $\Gamma \subset \partial \mathcal{K}$ et $\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^e$, correspondants. Pour simplifier, nous nous limiterons ici au cas métal parfaitement conducteur (1.6).*

D'un autre côté, les coefficients sont choisis de sorte à avoir une conservation ou décroissance d'énergie afin d'obtenir par la suite un schéma numérique stable. Aussi allons-nous maintenant nous intéresser au comportement de l'énergie \mathcal{E} du système (1.9) à l'instant

$t \in (0, T)$, définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} (\bar{\epsilon} \mathbf{E}_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{K}} + \bar{\mu} \mathbf{H}_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{H}_{\mathcal{K}}) \, dx, \quad (1.11)$$

Il vient alors le théorème

Théorème 1.6 (Théorème 8, section 4.2 de [81]) *Si $\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}}$ vérifient les propriétés suivantes :*

- $\forall \Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \in \partial \mathcal{T}_h^i, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = -\gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}'}, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} = -\gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}}, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} = -1, \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} = 1$ et $\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} (= \alpha_{\Gamma}) \geq 0, \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} (= \chi_{\Gamma}) \geq 0,$
- $\forall \Gamma \subset \partial \mathcal{K} \in \partial \mathcal{T}_h^e, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = 0, \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \chi_{\Gamma} = 0, \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = 1$ et $\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} (= \alpha_{\Gamma}) \geq 0,$

alors, pour tout $t \in (0, T)$, nous avons l'estimation d'énergie :

$$\mathcal{E}(t) \leq \left(\mathcal{E}(0) + \int_0^t \left\| \bar{\epsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_s(u) \right\|_{\Omega}^2 \, du \right) e^t, \quad (1.12)$$

où $\|\cdot\|_{\Omega}$ désigne la norme L^2 sur Ω . De plus, si on suppose que les termes $\bar{\sigma}$ et $\mathbf{J}_s = 0$ sont nuls et que $\alpha = \chi = 0$, l'énergie est conservée, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0). \quad (1.13)$$

En accord avec la proposition 1.4 et le théorème 1.6, nous utiliserons deux types de flux :

- les flux centrés, issus de [85] :
 - $\forall \Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \in \partial \mathcal{T}_h^i, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} = -\frac{1}{2}, \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} = \frac{1}{2},$ et $\alpha_{\Gamma} = \chi_{\Gamma} = 0,$
 - $\forall \Gamma \subset \partial \mathcal{K} \in \partial \mathcal{T}_h^e, \alpha_{\Gamma} = \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = 0$ et $\gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = 1,$
- les flux décentrés, issus de [70] :
 - $\forall \Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \in \partial \mathcal{T}_h^i, \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} = -\frac{1}{2}, \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} = \frac{1}{2}, \alpha_{\Gamma} = \frac{\lambda}{Z_{\Gamma}}, \chi_{\Gamma} = \frac{\lambda}{Y_{\Gamma}},$ où $\lambda > 0$ est un paramètre de pénalisation des flux, et où Z_{Γ} et Y_{Γ} sont respectivement les impédances et admittances moyennes données par $Z_{\Gamma}(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (Z(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{n}_{\Gamma}) + Z(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{n}_{\Gamma}))/2$ et $Y_{\Gamma}(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (Y(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{n}_{\Gamma}) + Y(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{n}_{\Gamma}))/2,$
 - $\forall \Gamma \subset \partial \mathcal{K} \in \partial \mathcal{T}_h^e, \alpha_{\Gamma} = \beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = 0$ et $\gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = 1.$

La démonstration détaillée du théorème 1.6 est donnée dans [35], mais nous en redonnons ici les points importants, cette démonstration devant être adaptée dans le chapitre 2.

Éléments de démonstration du théorème 1.6. Dans un premier temps, on réécrit les deux équations de (1.10) pour $\phi_{1\mathcal{K}} = \mathbf{E}_{\mathcal{K}}$ et $\phi_{2\mathcal{K}} = \mathbf{H}_{\mathcal{K}}$, ce qui donne un premier bilan d'énergie sur toute cellule \mathcal{K} . De plus, par la formule de Green [90], nous avons alors l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} (\nabla \times \mathbf{H}_{\mathcal{K}}) \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{K}} \, dx &= \int_{\mathcal{K}} \mathbf{H}_{\mathcal{K}} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{\mathcal{K}}) \, dx - \int_{\partial \mathcal{K}} (\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}_{\mathcal{K}} \, ds \\ &= \int_{\mathcal{K}} \mathbf{H}_{\mathcal{K}} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{\mathcal{K}}) \, dx + \int_{\partial \mathcal{K}} (\mathbf{H}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{K}} \, ds. \end{aligned} \quad (1.14)$$

En faisant la somme des équations sur toutes les cellules $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ et en réutilisant l'égalité (1.14), nous obtenons un bilan d'énergie sur tout le domaine Ω . Après réarrangement des termes de surfaces, ce bilan s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} (\bar{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s) \cdot \mathbf{E} \, dx \\
&= \sum_{\substack{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i \\ \Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'}} \int_{\Gamma} \left[-(\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} \|\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma})\|^2 + \alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \|\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\Gamma})\|^2) \right. \\
&\quad + (\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}'})(\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot (\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\Gamma}))) \\
&\quad - (\chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} \|\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{H}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma})\|^2 + \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \|\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{H}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\Gamma})\|^2) \\
&\quad + (\chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}'})(\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{H}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot (\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{H}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\Gamma}))) \\
&\quad + (\beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}'})(\mathbf{H}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{K}} + (\beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} + \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}})(\mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{H}_{\mathcal{K}} \\
&\quad \left. + (\beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} - \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + 1)(\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{H}_{\mathcal{K}} + (\beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} - \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}'} + 1)(\mathbf{H}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \right] \, ds \\
&- \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^e} \int_{\Gamma} \left[\alpha_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \|\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma})\|^2 + \chi_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \|\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{H}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma})\|^2 \right. \\
&\quad \left. + (\beta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} - \gamma_{\Gamma}^{\mathcal{K}} + 1)(\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{H}_{\mathcal{K}} \right] \, ds.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Le choix des coefficients donnés dans l'énoncé permet alors d'assurer que la somme sur les termes de bord au second membre soit de signe négatif. Il reste enfin les termes volumiques. Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Jensen, le terme en \mathbf{J}_s est contrôlé par :

$$\left| \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} \, dx \right| \leq \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left\| \bar{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_s \right\|_{\mathcal{K}} \left\| \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right\|_{\mathcal{K}} \leq \frac{1}{2} \left(\left\| \bar{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_s \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right\|_{\Omega}^2 \right),$$

où $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ désigne la norme L^2 sur \mathcal{K} . Ainsi, dans le cas de la positivité de $\bar{\sigma}$, il vient :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq -2 \left\| \bar{\sigma}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \bar{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_s \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right\|_{\Omega}^2 \leq \left\| \bar{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_s \right\|_{\Omega}^2 + \mathcal{E}(t).$$

Le lemme de Grönwall permet de conclure.

Dans le cas où $\bar{\sigma} = 0$ et $\mathbf{J}_s = 0$, le bilan (1.15) se résume à $\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0$, d'où le résultat. ■

1.2.2 Méthode Galerkin discontinue

Ce paragraphe présente la construction du schéma numérique utilisé. En particulier, nous explicitons les éléments du schéma Galerkin discontinu en espace et *leap-frog* en temps pour une approximation discrète du problème de Maxwell mis sous la forme (1.10).

1.2.2.1 Approximation spatiale

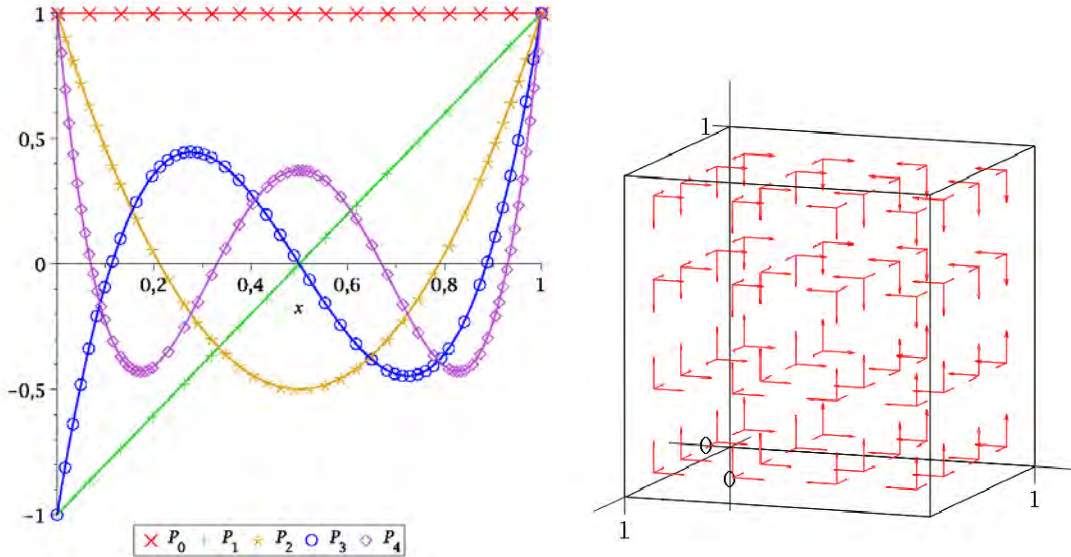
Dans notre approximation, nous supposons que dans chaque cellule \mathcal{K} du maillage, $\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ et $\sigma(\mathbf{x})$ sont constants.

Nous définissons l'espace d'approximation V_h de $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$, que nous utiliserons dans tout le mémoire, par construction d'un ensemble de fonctions de base spécifique. Pour ce faire, nous allons construire V_h sur chaque élément $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ à partir d'un élément de référence $\hat{\mathcal{K}} = [0, 1]^3$.

Soient $(\hat{\xi}_l, \hat{\omega}_l)_{l=1, \dots, r+1}$ les points et les poids de la formule de quadrature suivante de Gauss sur $[0, 1]$

$$\int_0^1 p(x) dx \approx \sum_{l=1}^{r+1} \hat{\omega}_l p(\hat{\xi}_l), \quad (1.16)$$

où les points de Gauss $0 < \hat{\xi}_1 < \dots < \hat{\xi}_{r+1} < 1$ sont les zéros du polynôme de Legendre de degré $r + 1$ [1]. La formule (1.16) est alors exacte pour tout polynôme $p \in Q_{2r+1}([0, 1])$, où $Q_{2r+1}([0, 1])$ est l'ensemble des polynômes sur $[0, 1]$ de degré au plus $2r + 1$ [37]. Le tableau 1.1 contient les points et les poids de Gauss pour $r = 0, \dots, 4$. Les polynômes de Legendre P_r correspondants sont tracés dans la figure 1.2(a). Nous notons enfin $(\hat{\varphi}_l)_{l=1, \dots, r+1}$ l'ensemble des polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux points de Gauss sur $[0, 1]$.



(a) Représentation des cinq premiers polynômes de Legendre. (b) Répartition des degrés de liberté dans $Q_3(\hat{\mathcal{K}})$.

FIGURE 1.2: Construction des fonctions de base sur l'élément de référence.

Sur l'élément $\hat{\mathcal{K}}$, pour $\ell = (l_1, l_2, l_3) \in [1, \dots, r + 1]^3$, nous définissons trois fonctions

TABLE 1.1: Poids et points de Gauss sur $]0; 1[$ pour les cinq premiers ordres

Ordre Points Poids	0	1	2	3	4
$\hat{\xi}_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$	$\frac{5 - \sqrt{15}}{10}$	$\frac{35 - \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{70}$	$\frac{21 - \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}}{42}$
$\hat{\omega}_1$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{18}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{72}$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800}$
$\hat{\xi}_2$		$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{35 - \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{70}$	$\frac{21 - \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}}{42}$
$\hat{\omega}_2$		$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{72}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800}$
$\hat{\xi}_3$			$\frac{5 - \sqrt{15}}{10}$	$\frac{35 + \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{70}$	$\frac{1}{2}$
$\hat{\omega}_3$			$\frac{5}{18}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{72}$	$\frac{64}{225}$
$\hat{\xi}_4$				$\frac{35 + \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{70}$	$\frac{21 + \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}}{42}$
$\hat{\omega}_4$				$\frac{18 - \sqrt{30}}{72}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800}$
$\hat{\xi}_5$					$\frac{21 + \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}}{42}$
$\hat{\omega}_5$					$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800}$

vectérielles $\widehat{\varphi}_\ell^i$ ($i = 1, \dots, 3$) en chaque point $\widehat{\mathbf{x}} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) \in \widehat{\mathcal{K}}$ par :

$$\widehat{\varphi}_\ell^i(\widehat{\mathbf{x}}) = \widehat{\varphi}_{l_1}(\widehat{x}_1)\widehat{\varphi}_{l_2}(\widehat{x}_2)\widehat{\varphi}_{l_3}(\widehat{x}_3)\vec{e}_i \quad (1.17)$$

où \vec{e}_i définit un élément de la base cartésienne $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. La figure 1.2(b) représente l'ensemble des fonctions de base définies sur $\widehat{\mathcal{K}}$ pour un ordre d'approximation spatiale $r = 3$.

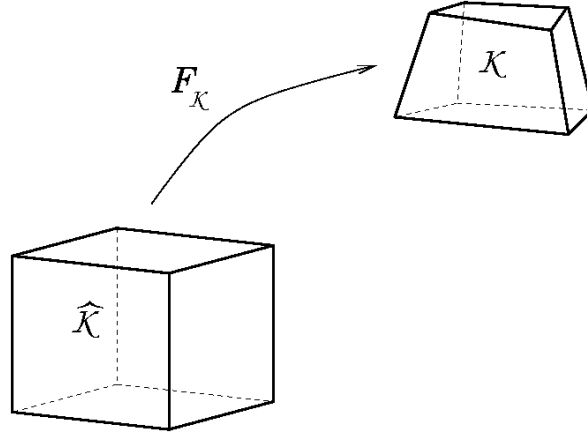


FIGURE 1.3: Illustration du difféomorphisme de $\widehat{\mathcal{K}}$ vers un élément \mathcal{K} du maillage.

Pour chaque élément $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, on définit une bijection $F_{\mathcal{K}}$ telle que $F_{\mathcal{K}}(\widehat{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}$. La fonction $F_{\mathcal{K}}$ est une transformation trilinéaire de type Q_1 (voir figure 1.3), affine lorsque \mathcal{K} est un parallélépipède. Pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, $DF_{\mathcal{K}}$ est la matrice jacobienne associée à la transformation $F_{\mathcal{K}}$, donnée par :

$$DF_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{\mathcal{K},1}}{\partial \widehat{x}_1} & \frac{\partial F_{\mathcal{K},1}}{\partial \widehat{x}_2} & \frac{\partial F_{\mathcal{K},1}}{\partial \widehat{x}_3} \\ \frac{\partial F_{\mathcal{K},2}}{\partial \widehat{x}_1} & \frac{\partial F_{\mathcal{K},2}}{\partial \widehat{x}_2} & \frac{\partial F_{\mathcal{K},2}}{\partial \widehat{x}_3} \\ \frac{\partial F_{\mathcal{K},3}}{\partial \widehat{x}_1} & \frac{\partial F_{\mathcal{K},3}}{\partial \widehat{x}_2} & \frac{\partial F_{\mathcal{K},3}}{\partial \widehat{x}_3} \end{pmatrix}, \text{ avec } F_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} F_{\mathcal{K},1} \\ F_{\mathcal{K},2} \\ F_{\mathcal{K},3} \end{pmatrix},$$

et $J_{\mathcal{K}}$ désigne le jacobien de $F_{\mathcal{K}}$. Soit ensuite l'espace d'approximation de $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$:

$$V_h = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^3 / \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, DF_{\mathcal{K}}^* v|_{\mathcal{K}} \circ F_{\mathcal{K}} \in [Q_{r_{\mathcal{K}}}(\widehat{\mathcal{K}})]^3 \right\},$$

où $Q_{r_{\mathcal{K}}}(\widehat{\mathcal{K}}) = \text{vect} \left\{ \widehat{\mathbf{x}} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) \in \widehat{\mathcal{K}} \mapsto (\widehat{x}_1)^i (\widehat{x}_2)^j (\widehat{x}_3)^k, 0 \leq i, j, k \leq r_{\mathcal{K}} \right\}$, et $r_{\mathcal{K}}$ est un ordre polynomial fixé sur \mathcal{K} qui peut éventuellement être choisi non-constant sur l'ensemble du maillage \mathcal{T}_h . On définit enfin un ensemble de fonctions de base locales qui sont données pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ par :

$$\varphi_{ijk,\mathcal{K}}^l(\mathbf{x}) = \varphi_{ijk,\mathcal{K}}^l \circ F_{\mathcal{K}}(\widehat{\mathbf{x}}) = (DF_{\mathcal{K}}^*)^{-1}(\widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\varphi}_{ijk}^l(\widehat{\mathbf{x}}) \text{ pour } \widehat{\mathbf{x}} = (F_{\mathcal{K}})^{-1}(\mathbf{x}) \in \widehat{\mathcal{K}}.$$

La base de V_h , notée \mathcal{B}_h^{3D} , est ainsi donnée par :

$$\mathcal{B}_h^{3D} = \{ \varphi_{ijk,\mathcal{K}}^l \mathbb{1}_{\mathcal{K}}, (i, j, k) \in \{1; \dots; r_{\mathcal{K}} + 1\}^3, l \in \{1; 2; 3\}, \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \},$$

où $\mathbb{1}_{\mathcal{K}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$. Finalement, on décompose une variable $\mathbf{u}_h \in V_h$ sur la base \mathcal{B}_h^{3D} comme suit :

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathcal{K}}, \mathbf{u}_{h|\mathcal{K}} \circ F_{\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{(i,j,k) \in \{1;\dots;r_{\mathcal{K}}+1\}^3} u_{ijk,\mathcal{K}}^l D F_{\mathcal{K}}^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\hat{\varphi}_{ijk,\mathcal{K}}^l(\hat{\mathbf{x}}) \right), \quad (1.18)$$

où $\left\{ u_{ijk,\mathcal{K}}^l, (i,j,k) \in \{1;\dots;r_{\mathcal{K}}+1\}^3, l \in \{1;2;3\}, \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\}$ sont les degrés de liberté de \mathbf{u}_h .

Le schéma semi-discret en espace du système (1.10) s'écrit alors :

Trouver $(\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t)) \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{B}_h^{3D})}([0, T])$ tel que :

$$\begin{cases} M_{\bar{\varepsilon}} \partial_t \mathbf{E}(t) - R \mathbf{H}(t) + M_{\bar{\sigma}} \mathbf{E}(t) + M_{I_3} \mathbf{J}_s = S_d^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{E}(t) + S_c^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}(t), \\ M_{\bar{\mu}} \partial_t \mathbf{H}(t) + R \mathbf{E}(t) = S_d^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{H}(t) + S_c^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}(t) + S_{cb}^1 \mathbf{E}(t), \end{cases} \quad (1.19)$$

où les matrices $M_{\bar{T}}$, R , S_c^{θ} et S_d^{θ} représentent les formes bilinéaires suivantes calculées sur les fonctions de base de \mathcal{B}_h^{3D} :

$$(M_{\bar{T}})_{ij} = \int_{\Omega} \bar{T} \phi_j \cdot \phi_i \, d\mathbf{x}, \text{ pour } \bar{T} \in \{\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}, \bar{\sigma}, I_3\}, (R)_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \times \phi_j \cdot \phi_i \, d\mathbf{x},$$

$$(S_c^{\theta})_{ij} = \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \theta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\phi_{j\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \cdot \phi_{i\mathcal{K}} \, ds, \quad (1.20a)$$

$$(S_d^{\theta})_{ij} = \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \theta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\phi_{j\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma})]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \cdot \phi_{i\mathcal{K}} \, ds, \quad (1.20b)$$

$$(S_{cb}^{\theta})_{ij} = \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^e} \int_{\Gamma} \theta_{\Gamma}^{\mathcal{K}} [\![\phi_{j\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}]\!]_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \cdot \phi_{i\mathcal{K}} \, ds. \quad (1.20c)$$

où i et j parcourent un indexage global de \mathcal{B}_h^{3D} .

Remarque 1.7 Le choix des fonctions de base de \mathcal{B}_h^{3D} permet d'avoir la propriété intéressante de condensation de masse. En effet, pour cet ensemble de fonctions de base, la matrice de masse associée devient diagonale par blocs, chaque bloc étant de taille 3×3 , donc aisément inversible et stockable à moindre coût. La matrice de rigidité est quant à elle locale, mais se calcule à partir de $\hat{\mathcal{K}}$ en ne stockant que le signe du jacobien en chaque nœud de calcul [81].

1.2.2.2 Approximation temporelle

Nous utilisons une discrétisation temporelle des équations de Maxwell par un schéma *leap-frog*, qui est le schéma couramment utilisé pour ce type d'équation.

Soit $\Delta t > 0$ un pas de temps donné. Nous associons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les temps $t^n = n\Delta t$ au champ \mathbf{E} et $t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2}) \Delta t$ au champ \mathbf{H} . La discrétisation du système (1.19)

par un schéma *leap-frog* s'écrit alors [81] :

Pour tout $n \in \{0; \dots; N-1\}$, trouver $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}}) \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{B}_h^{3D})} \times \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{B}_h^{3D})}$ tel que :

$$\begin{cases} M_{\bar{\varepsilon}} \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} - R \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} + M_{\bar{\sigma}} \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n+1}}{2} + M_{I_3} \mathbf{J}_s^{n+\frac{1}{2}} = S_d^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{E}^n + S_c^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \\ M_{\bar{\mu}} \frac{\mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + R \mathbf{E}^{n+1} = S_d^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} + S_c^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}^{n+1} + S_{cb}^1 \mathbf{E}^{n+1}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Remarque 1.8 Le schéma (1.21) n'est pas à proprement parler une discrétisation *leap-frog* du schéma semi-discret (1.19). En effet, dans un schéma *leap-frog* classique, les premiers termes des seconds membres respectifs de (1.21) devraient s'écrire sous la forme :

$$S_d^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n+1}}{2}, S_{cb}^1 \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n+1}}{2} \text{ et } S_d^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}}}{2}.$$

Le choix effectué dans (1.21) permet de conserver un schéma d'ordre 2 et totalement explicite et donc d'obtenir une résolution rapide du problème temporel. De plus, comme les seules matrices à inverser pour effectuer la progression en temps sont diagonales par blocs, le coût calcul sera peu élevé.

1.2.3 Résultats de convergence

Cette section rappelle des éléments de démonstration sur les résultats de convergence du schéma discret GD3D (1.21). Nous rappelons notamment des résultats établis sur la condition de stabilité et l'ordre de convergence du schéma.

Dans l'ensemble des résultats de stabilité démontrés dans [35] et [70], l'ordre polynomial est fixé constant égal à r . Par conséquent, dans tous les rappels de cette section, et en particulier pour le théorème 1.24, nous nous limiterons à $r_K = r, \forall K \in \mathcal{T}_h$.

1.2.3.1 Stabilité du schéma GD3D

Pour établir la stabilité du schéma GD3D, il est nécessaire d'introduire une notion d'« énergie discrète » au temps $t^n = n\Delta t$. L'écriture du schéma (1.21) suggère la quantité suivante :

$$\mathcal{E}_h^n = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_K^n = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_K^n \cdot \mathbf{E}_K^n + \bar{\mu} \mathbf{H}_K^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_K^{n-\frac{1}{2}} \right) d\mathbf{x}. \quad (1.22)$$

Il est également requis, pour les calculs en flux décentrés, de définir l'« énergie discrète modifiée »

$$\tilde{\mathcal{E}}_h^n = \mathcal{E}_h^n + \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{Y_{\Gamma}} \left(\llbracket \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_{\Gamma} \rrbracket_{\Gamma} \right)^2 - \frac{1}{Z_{\Gamma}} \left(\llbracket \mathbf{E}^n \times \mathbf{n}_{\Gamma} \rrbracket_{\Gamma} \right)^2 \right] ds, \quad (1.23)$$

qui coïncide avec l'énergie discrète (1.22) dans le cas des flux centrés ($\lambda = 0$). Enfin, toutes les intégrales sont supposées calculées selon la formule de quadrature (1.16).

Il vient alors le résultat préliminaire suivant :

Proposition 1.9 (Théorème 13, section 4.6.2 de [81], proposition 1, [70]) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans le cas d'un calcul en flux centrés, l'énergie discrète est conservée :*

$$\mathcal{E}_h^{n+1} = \mathcal{E}_h^n.$$

Dans le cas d'un calcul en flux décentrés, si $\lambda > 0$, alors l'énergie discrète modifiée décroît :

$$\tilde{\mathcal{E}}_h^{n+1} \leq \tilde{\mathcal{E}}_h^n.$$

Si la quantité $\tilde{\mathcal{E}}_h^n$ définissait une norme des solutions au temps t^n alors la proposition 1.9 impliquerait la stabilité du schéma GD3D. Or, la définition (1.23) montre que cette quantité peut ne pas être définie positive. Toutefois, on prouve, avec le résultat suivant, que si Δt est suffisamment petit, $\tilde{\mathcal{E}}_h^n$ définit bien une quantité définie positive des solutions du schéma GD3D (1.21).

Théorème 1.10 (Théorème 3, [35], proposition 3, [70]) *Pour tout élément $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, la condition*

$$\frac{\Delta t}{\Lambda_{\mathcal{K}}} < \frac{2/c_{\mathcal{K}}}{\sqrt{\lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}} \widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right)} + \frac{1}{2} \max_{\substack{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i \\ \Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'}} \left(\sqrt{\frac{\mu_{\mathcal{K}}}{\mu_{\mathcal{K}'}}}, \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathcal{K}}}{\varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \right) \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{B}} \widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right)}, \quad (1.24)$$

avec

- la célérité de la lumière dans la cellule $c_{\mathcal{K}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\mathcal{K}} \varepsilon_{\mathcal{K}}}}$, où $\mu_{\mathcal{K}}$ et $\varepsilon_{\mathcal{K}}$ sont les valeurs maximales des tenseurs $\bar{\mu}$ et $\bar{\varepsilon}$ respectivement sur \mathcal{K} ,
- $\Lambda_{\mathcal{K}} = \min_{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathcal{K}}} \frac{|J_{\mathcal{K}}(\widehat{\mathbf{x}})|}{\lambda_{\max} (D F_{\mathcal{K}}^* D F_{\mathcal{K}}(\widehat{\mathbf{x}}))}$, où pour toute matrice M , $\lambda_{\max}(M)$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice,
- les matrices $\widehat{\mathcal{M}}$, $\widehat{\mathcal{R}}$ et $\widehat{\mathcal{B}}$ désignant les matrices respectives des trois formes quadratiques, calculées sur les fonctions de base $\{\widehat{\varphi}_{ijk}^l\}$ de l'élément de référence $\widehat{\mathcal{K}}$:

$$\widehat{\mathcal{M}}_{i,j} = \int_{\widehat{\mathcal{K}}} \widehat{\phi}_i \cdot \widehat{\phi}_j \, d\widehat{\mathbf{x}}, \quad \widehat{\mathcal{R}}_{i,j} = \int_{\widehat{\mathcal{K}}} (\widehat{\nabla} \times \widehat{\phi}_i) \cdot (\widehat{\nabla} \times \widehat{\phi}_j) \, d\widehat{\mathbf{x}}, \quad \widehat{\mathcal{B}}_{i,j} = \sum_{\widehat{\Gamma} \in \partial \widehat{\mathcal{K}}} \int_{\widehat{\Gamma}} (\widehat{\phi}_i \times \widehat{\mathbf{n}}) \cdot (\widehat{\phi}_j \times \widehat{\mathbf{n}}) \, d\widehat{s},$$

est suffisante pour assurer la stabilité du schéma Galerkin discontinu (1.21) en flux centrés ($\lambda = 0$).

Dans le cas des flux décentrés, on obtient le même résultat en remplaçant (1.24) par

$$\frac{\Delta t}{\Lambda_{\mathcal{K}}} < \frac{2/c_{\mathcal{K}}}{\sqrt{\lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}} \widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right)} + \left(\frac{1}{2} \max_{\substack{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i \\ \Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'}} \left(\sqrt{\frac{\mu_{\mathcal{K}}}{\mu_{\mathcal{K}'}}}, \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathcal{K}}}{\varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \right) + 4\lambda \right) \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{B}} \widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right)}. \quad (1.25)$$

Avec les relations (1.24) et (1.25), le théorème (1.10) donne les conditions CFL respectives pour le schéma GD3D dans le cas d'une utilisation en flux centrés ou décentrés.

Comme précédemment pour le théorème 1.6, puisque les démonstrations de la proposition 1.9 et du théorème 1.10 devront être adaptées dans le chapitre 2, nous rappelons donc ici les points importants de leurs constructions.

Éléments de démonstration de la proposition 1.9. On traite dans un premier temps le cas des flux centrés ($\lambda = 0$). En prenant, respectivement, le produit scalaire de la première équation de (1.21) calculée au temps t^n contre $\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n+1}$ et de la seconde contre $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$, puis en prenant la seconde équation au temps t^{n-1} contre $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$, la somme de ces trois équations donne :

$$\mathcal{E}_h^{n+1} - \mathcal{E}_h^n = 0.$$

Dans le cas des flux décentrés, en reprenant le même mode opératoire, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+1} - \mathcal{E}_h^n &= -\lambda \Delta t \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \frac{1}{Z_{\Gamma}} \left[\|\mathbf{E}^n \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 + \|\mathbf{E}^n \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma} \cdot \|\mathbf{E}^{n+1} \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma} \right] ds \\ &\quad - \lambda \Delta t \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \frac{1}{Y_{\Gamma}} \left[\|\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 + \|\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma} \cdot \|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma} \right] ds \\ &\leq \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \frac{1}{Z_{\Gamma}} \left[\|\mathbf{E}^{n+1} \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 - \|\mathbf{E}^n \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 \right] ds \\ &\quad + \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \frac{1}{Y_{\Gamma}} \left[\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 - \|\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 \right] ds \end{aligned} \quad (1.26)$$

Par identification, le bilan (1.26) équivaut finalement à l'inégalité $\tilde{\mathcal{E}}_h^{n+1} - \tilde{\mathcal{E}}_h^n \leq 0$. ■

Éléments de démonstration du théorème 1.10. Dans un premier temps, nous considérons le cas du schéma en flux centrés ($\lambda = 0$). En remarquant que :

$$\int_{\mathcal{K}} \bar{\mu} \mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n-\frac{1}{2}} dx = \int_{\mathcal{K}} \bar{\mu} \mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} dx - \int_{\mathcal{K}} \bar{\mu} \mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n-\frac{1}{2}}) dx,$$

on réutilise la seconde équation de (1.21) pour obtenir l'égalité suivante : $\mathcal{E}_h^n =$

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} \left[\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n + \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{c_{\mathcal{K}} \Delta t}{2} \left(\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \right) \right] dx \\ &+ \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \frac{c_{\mathcal{K}} \Delta t}{2} \left(\sum_{\substack{\Gamma \subset \partial \mathcal{K} \\ \Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^e}} \int_{\Gamma} (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \times \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} ds - \sum_{\substack{\Gamma = \partial \mathcal{K} \cap \partial \mathcal{K}' \\ \Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathcal{K}}}{\varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \int_{\Gamma} (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}'}^n \times \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} ds \right), \end{aligned} \quad (1.27)$$

en ayant introduit les champs réduits $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n = \sqrt{\varepsilon_{\mathcal{K}}} \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^n$ et $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\mu_{\mathcal{K}}} \mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}}$.

L'énergie discrète est maintenant exprimée comme une forme quadratique avec les seules variables $(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n, \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}})$, écrits sans les exposants temporels dans la suite pour alléger les notations. Pour prouver la stabilité L^2 , il faut trouver une condition sur Δt afin d'assurer que cette forme soit définie positive, et donc de garantir que \mathcal{E}_h^n est une norme. Aussi, on opère un retour à l'élément de référence sur chacune des intégrales de cette expression. Pour traiter les intégrales surfaciques dans (1.27), on remarque que pour une face frontière interne $\Gamma = \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}' \in \partial\mathcal{T}_h^i$, correspondent par les applications $F_{\mathcal{K}}$ et $F_{\mathcal{K}'}$ respectivement, les faces $\hat{\Gamma}$ et $\hat{\Gamma}'$ de $\hat{\mathcal{K}}$. Nous introduisons donc l'application

$$G_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}} : \hat{\Gamma}' \longrightarrow \hat{\Gamma}, \hat{\mathbf{x}} \longmapsto G_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) := F_{\mathcal{K}}^{-1}|_{\Gamma} \circ F_{\mathcal{K}'}|_{\Gamma}(\hat{\mathbf{x}}).$$

À partir de cette application, le lien entre les degrés de liberté des traces tangentes des fonctions de base sur \mathcal{K} et \mathcal{K}' est donné par la matrice unitaire $N_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}} = DF_{\mathcal{K}}^{-1} \circ G_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}} DF_{\mathcal{K}'}$. En reportant, les différents termes de (1.27) se réécrivent sur $\hat{\mathcal{K}}$ et amènent la minoration suivante :

$$\mathcal{E}_h^n \geq \hat{\mathcal{E}},$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}} = & \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\hat{\mathcal{K}}} \Lambda_{\mathcal{K}} \left(\hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} + \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \cdot \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \right) d\hat{\mathbf{x}} \right. \\ & + \frac{c_{\mathcal{K}} \Delta t}{2} \text{sgn}(J_{\mathcal{K}}) \left[\int_{\hat{\mathcal{K}}} \left(\hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \cdot \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} + \hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \right) d\hat{\mathbf{x}} + \sum_{\substack{\Gamma \subset \partial\mathcal{K} \\ \Gamma \in \partial\mathcal{T}_h^e}} \int_{\hat{\Gamma}} (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} d\hat{s} \right] \\ & \left. - \frac{c_{\mathcal{K}} \Delta t}{2} \sum_{\substack{\Gamma = \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}' \\ \Gamma \in \partial\mathcal{T}_h^i}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathcal{K}}}{\varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \text{sgn}(J_{\mathcal{K}'}) \int_{\hat{\Gamma}'} (\hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}'} \times \hat{\mathbf{n}}') \cdot N_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}}^* \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \circ G_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}} d\hat{s} \right\}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

pour $\hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} = DF_{\mathcal{K}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}$ et $\hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} = DF_{\mathcal{K}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}$. Il vient alors les majorations :

$$\int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \cdot \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} d\hat{\mathbf{x}} \leq \sqrt{\lambda_{\max} \left(\hat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}} \hat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right)} \left\| \hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\hat{\mathcal{K}}} \left\| \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\hat{\mathcal{K}}}, \quad (1.29a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\mu_{\mathcal{K}} \varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \int_{\hat{\Gamma}} (\hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}'} \times \hat{\mathbf{n}}') \cdot N_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}}^* \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \circ G_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}} d\hat{s} \\ & \leq \frac{1}{2} \left[c_{\mathcal{K}'} \sqrt{\frac{\mu_{\mathcal{K}'}}{\mu_{\mathcal{K}}}} \left\| \hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}'} \times \hat{\mathbf{n}}' \right\|_{\hat{\Gamma}'}^2 + c_{\mathcal{K}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathcal{K}'}}{\varepsilon_{\mathcal{K}}}} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \times \hat{\mathbf{n}} \right\|_{\hat{\Gamma}}^2 \right], \end{aligned} \quad (1.29b)$$

$$\int_{\hat{\Gamma}} (\hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} d\hat{s} \leq \frac{1}{2} \left[\left\| \hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \times \hat{\mathbf{n}} \right\|_{\hat{\Gamma}}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \times \hat{\mathbf{n}} \right\|_{\hat{\Gamma}}^2 \right], \quad (1.29c)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \sum_{\Gamma = \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}'} \frac{\Delta t}{2\sqrt{\mu_{\mathcal{K}} \varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \text{sgn}(J_{\mathcal{K}'}) \int_{\hat{\Gamma}} (\hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}'} \times \hat{\mathbf{n}}') \cdot N_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}}^* \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \circ G_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}} d\hat{s} \\ & + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \sum_{\Gamma = \partial\mathcal{K} \cap \partial\Omega} \frac{\Delta t}{2\sqrt{\mu_{\mathcal{K}} \varepsilon_{\mathcal{K}}}} \text{sgn}(J_{\mathcal{K}}) \int_{\hat{\Gamma}} (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} d\hat{s} \\ & \leq \frac{\lambda_{\max} \left(\hat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right)}{2} \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} c_{\mathcal{K}} \max_{\mathcal{K}' / \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}' \neq \emptyset} \left(\sqrt{\frac{\mu_{\mathcal{K}}}{\mu_{\mathcal{K}'}}}, \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathcal{K}}}{\varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \right) \left[\left\| \hat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\hat{\mathcal{K}}}^2 + \left\| \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\hat{\mathcal{K}}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.29d)$$

La combinaison des inégalités donne :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{E}} \geq & \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \Lambda_{\mathcal{K}} \left[\left(1 - \frac{\Delta t c_{\mathcal{K}}}{4\Lambda_{\mathcal{K}}} \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{B}} \widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right) \max_{\mathcal{K}' / \partial \mathcal{K} \cap \partial \mathcal{K}' \neq \emptyset} \left(\sqrt{\frac{\mu_{\mathcal{K}}}{\mu_{\mathcal{K}'}}}, \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathcal{K}}}{\varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \right) \right) \left\| \widehat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\widehat{\mathcal{K}}}^2 \right. \\ & + \left(1 - \frac{\Delta t c_{\mathcal{K}}}{4\Lambda_{\mathcal{K}}} \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{B}} \widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right) \max_{\mathcal{K}' / \partial \mathcal{K} \cap \partial \mathcal{K}' \neq \emptyset} \left(\sqrt{\frac{\mu_{\mathcal{K}}}{\mu_{\mathcal{K}'}}}, \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathcal{K}}}{\varepsilon_{\mathcal{K}'}}} \right) \right) \left\| \widehat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\widehat{\mathcal{K}}}^2 \\ & \left. - \frac{\Delta t c_{\mathcal{K}}}{\Lambda_{\mathcal{K}}} \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}} \widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right) \left\| \widehat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\widehat{\mathcal{K}}} \left\| \widehat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\widehat{\mathcal{K}}} \right]. \end{aligned}$$

Sous la condition (1.24) sur Δt , cette dernière quantité devient alors positive, ce qui permet de conclure que \mathcal{E}^n est une norme. Par la proposition 1.9, le schéma est donc stable dans le cas des flux centrés.

D'autre part, dans le cas du schéma en flux décentrés, on remarque que :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_h^n \geq \mathcal{E}_h^n - \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \frac{1}{Z_{\Gamma}} (\llbracket \mathbf{E}^n \times \mathbf{n}_{\Gamma} \rrbracket_{\Gamma})^2 ds,$$

En remarquant que nous avons la majoration suivante :

$$\sum_{\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i} \int_{\Gamma} \frac{1}{Z_{\Gamma}} (\llbracket \mathbf{E}^n \times \mathbf{n}_{\Gamma} \rrbracket_{\Gamma})^2 ds \leq 4\lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{B}} \widehat{\mathcal{M}}^{-\frac{1}{2}} \right) \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} c_{\mathcal{K}} \left\| \widehat{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}} \right\|_{\mathcal{K}}^2, \quad (1.30)$$

et en recombinaison les inégalités (1.29) et (1.30), sous la condition (1.25), $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ définit à son tour une norme, et donc, à nouveau par la proposition 1.9, le schéma est stable dans le cas des flux décentrés. ■

1.2.3.2 Ordre de convergence du schéma GD3D

Citons enfin le résultat de consistance suivant sur la méthode, qui, avec le résultat de stabilité vu dans la section précédente, permet d'assurer la convergence du schéma :

Théorème 1.11 (Proposition 3 et théorème 1, [70]) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tous $(s, s') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^{s+1}(\mathcal{T}_h)$ et $(\partial_t \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^{s'+1}(\mathcal{T}_h)$, avec $\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h) = [H^s(\mathcal{T}_h)]^3$. On note, pour $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, le diamètre de l'élément $h_{\mathcal{K}}$, supposé compris entre 0 et 1, et $h = \max_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{K}}$. On a alors l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} & \left[\left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_h) \right\|_{\Omega} + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_h) \right\|_{\Omega} \right] (T) - \left[\left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_h) \right\|_{\Omega} + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_h) \right\|_{\Omega} \right] (0) \\ & \leq C_P T h^{m_P} \max(\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{H}^{s+1}(\Omega)}, \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^{s+1}(\Omega)}) \\ & \quad + C_I T h^{m_I} \max_{t \in (0, T)} (\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{H}^{s+1}(\Omega)}(t), \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^{s+1}(\Omega)}(t), \|\partial_t \mathbf{E}\|_{\mathbf{H}^{s'+1}(\Omega)}(t), \|\partial_t \mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^{s'+1}(\Omega)}(t)) \end{aligned}$$

où C_P, C_I sont des constantes positives, $m_P = \min(s + \frac{1}{2}, r - \frac{1}{2})$ et $m_I = \min(s + \frac{1}{2}, s' - \frac{1}{2}, r - \frac{1}{2})$.

La démonstration de ce théorème se base sur l'orthogonalité des erreurs de projection (approximation en espace) et d'interpolation (résolution du schéma) commises entre la solution du problème continu et du problème discret. On trouvera le détail des calculs dans les annexes de [70].

Opérateur d'interpolation de « condition initiale » pour le schéma GD

Ce chapitre traite d'un problème peu abordé dans l'adaptation dynamique de maillage : le choix de l'opérateur d'interpolation de condition initiale en temps. En effet, dans une stratégie d'adaptation dynamique sur calcul dans le domaine temporel, il apparaît naturellement que l'espace d'approximation de la solution numérique peut changer entre deux itérations successives n et $n + 1$, par raffinement/déraffinement du pas d'espace et/ou par modification d'ordre. Le calcul de la solution au temps $n + 1$ nécessite donc les valeurs obtenues à l'itération n mais rapportées sur l'espace d'approximation associé au temps $n + 1$. Il est donc nécessaire de définir une interpolation de ces valeurs.

La première partie de ce chapitre considère le traitement simplifié des équations de Maxwell en une dimension d'espace. Notre objectif est de pouvoir mettre en avant ce problème d'interpolation de condition initiale sur des exemples simples qui permettent entre autres de n'avoir que des maillages conformes (les frontières des domaines en 1D sont réduites à des points) quelques soient les modifications effectuées sur les espaces d'approximation au cours du calcul.

Nous commençons cette partie par proposer des exemples numériques 1D mettant en évidence un phénomène d'instabilité du calcul pour des simulations GD en flux centrés et décentrés et en utilisant les projections Lagrange et L^2 comme interpolation de condition initiale. Avant ces exemples, une rapide mise-en-place du schéma GD1D utilisé, dérivé du schéma GD3D présenté au chapitre 1, est effectuée.

Afin de pouvoir proposer un bon choix d'opérateur d'interpolation de condition initiale, nous reprenons donc l'écriture et l'étude du schéma GD1D en introduisant la notion d'espace d'approximation évolutif dans le schéma. Nous montrons alors l'apparition de termes non-signés liés au changement d'espace d'approximation dans les bilans d'énergie pouvant alors expliquer les instabilités observées. De cette étude nous en tirons des propriétés à vérifier par l'opérateur d'interpolation pour retrouver un schéma stable et consistant. Nous proposons donc un nouvel opérateur défini de manière implicite par un problème

d'optimisation local. Après avoir montré que cet opérateur est bien défini, nous démontrons qu'il vérifie asymptotiquement les propriétés précédemment formulées. De plus, nous en tirons un contrôle *a posteriori* sur l'erreur d'interpolation qu'il commet. Enfin, cet opérateur est validé numériquement sur les exemples présentés au début du chapitre.

La seconde partie du chapitre se propose de reprendre le travail d'analyse et de construction de l'opérateur de condition initiale 1D précédemment développé pour le cas du schéma GD3D. Par le même travail nous montrons qu'un phénomène d'instabilité peut aussi apparaître dans le cas 3D et nous en déduisons des conditions similaires à vérifier. Sur le même principe que pour le cas simplifié 1D, un opérateur d'interpolation par minimisation est proposé. Après avoir montré qu'il est bien défini, nous prouvons qu'il vérifie à son tour asymptotiquement les conditions pour l'évolution d'espace en 3D.

Pour finir, à partir de la construction de cet opérateur d'interpolation et des propriétés de convergence démontrées nous pouvons donner la définition d'un critère CFL adaptatif valable pour l'utilisation du schéma GD3D avec des espaces d'approximation évolutifs.

2.1 Étude préliminaire : mise en évidence d'une instabilité numérique liée à l'adaptation hp sur l'exemple simplifié 1D

Dans cette section nous effectuons la mise en place de l'étude sur le système simplifié en 1D. Dans un premier temps nous rappelons le schéma GD correspondant au passage en 1D du schéma présenté dans le chapitre 1. Dans un second temps, nous introduisons une série d'exemples permettant de mettre en avant la problématique de l'interpolation de condition initiale à l'aide de ce schéma.

2.1.1 Système de Maxwell et schéma Galerkin discontinu en 1D

Afin de pouvoir illustrer la problématique de l'interpolation de condition initiale sur l'exemple simplifié 1D, nous allons très rapidement rappeler l'écriture des équations de Maxwell correspondant au système (1.5) en 1D, puis donner l'écriture en 1D du schéma Galerkin discontinu (1.21) ainsi que de la proposition 1.4 et du théorème 1.6 afin d'en déduire les valeurs des paramètres du schéma. Enfin, nous formulons la condition CFL du théorème 1.10 pour le schéma GD1D. Tous ces résultats s'obtiennent par transposition littérale des démonstrations 3D et donc nous n'en donnerons pas les preuves ici, à l'exception des résultats concernant la stabilité (proposition 2.3 et théorème 2.4) dont les résultats sont réutilisés par la suite. Par ailleurs, contrairement à ce qui a été rappelé dans la section 1.2.3, nous démontrons ici ces résultats, pour le cas 1D, dans le cas d'un schéma GD à ordre non-constant.

Système de Maxwell 1D

En un temps $t \in [0, T]$ et un point x de Ω un ouvert borné de \mathbb{R} , nous considérons les champs $E(t, x)$ et $H(t, x) \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^1(\Omega))$, tels que :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E(t, x) = -\partial_x H(t, x) - \sigma(x)E(t, x) - J_s \text{ pour } x \in \Omega, \\ \mu \partial_t H(t, x) = -\partial_x E(t, x) \text{ pour } x \in \Omega, \\ \mathbf{n}_x E - \mathcal{Z} H = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega, \\ (E(t = 0, x), H(t = 0, x)) = (E_0(x), H_0(x)) \text{ pour } x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

avec σ la conductivité du milieu, J_s la distribution de sources dans le milieu, $\mathcal{Z} \geq 0$ son impédance et \mathbf{n}_x la normale sortante à Ω .

Dans la formulation (2.1), nous avons pris une condition limite plus générale (de type impédance) que celle utilisée pour le système (1.5) afin de pouvoir par la suite effectuer à la fois des simulations en espace libre (en prenant $\mathcal{Z} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$) et en domaine borné par des conditions métalliques parfaitement conductrices ($\mathcal{Z} = 0$).

Formulation variationnelle préliminaire pour obtention du GD1D

Soit Ω un intervalle borné de frontière $\partial\Omega$. On suppose que le domaine de calcul Ω est subdivisé en un ensemble $\mathcal{T}_h = \{\mathcal{K}_i, i = 1, \dots, N_e\}$ de N_e segments \mathcal{K}_i tels que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} \mathcal{K}_i$ et $\dot{\mathcal{K}}_i \cap \dot{\mathcal{K}}_j = \emptyset$, pour tous (i, j) vérifiant $1 \leq i \neq j \leq N_e$.

Comme dans le cas 3D, nous choisissons ainsi un nouvel espace de fonctions

$$H^1(\mathcal{T}_h) = \{f / \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, f|_{\mathcal{K}} \in H^1(\mathcal{K})\},$$

sur lequel nous écrivons la formulation variationnelle du problème :

Trouver $(E(t), H(t)) \in H^1(\mathcal{T}_h)^2$ tel que $\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \forall (\phi_1, \phi_2) \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{K}} \varepsilon E_{\mathcal{K}} \cdot \phi_{1\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}} (\partial_x H_{\mathcal{K}} - (\sigma E_{\mathcal{K}} + J_s)) \cdot \phi_{1\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} \\ \quad = \left[\alpha_x^{\mathcal{K}} \llbracket E_{\mathcal{K}} \rrbracket_x^{\mathcal{K}} + \beta_x^{\mathcal{K}} \llbracket H_{\mathcal{K}} \mathbf{n}_x \rrbracket_x^{\mathcal{K}}, \phi_{1\mathcal{K}} \right]_{\partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{K}} \mu H_{\mathcal{K}} \cdot \phi_{2\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}} \partial_x E_{\mathcal{K}} \cdot \phi_{2\mathcal{K}} \, d\mathbf{x} = \left[\left(\gamma_x^{\mathcal{K}} \llbracket \mathbf{n}_x E \rrbracket_x^{\mathcal{K}} + \chi_x^{\mathcal{K}} \llbracket H \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right), \phi_{2\mathcal{K}} \right]_{\partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega} \\ \quad + \left[\left(\chi_x^{\mathcal{K}} \llbracket H \rrbracket_x^{\mathcal{K}} + \gamma_x^{\mathcal{K}} \llbracket \mathbf{n}_x E \rrbracket_x^{\mathcal{K}} + \mathcal{Z}_x \llbracket H \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right), \phi_{2\mathcal{K}} \right]_{\partial\mathcal{K} \cap \partial\Omega}, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $E_{\mathcal{K}} = E|_{\mathcal{K}}, H_{\mathcal{K}} = H|_{\mathcal{K}}, \phi_{j\mathcal{K}} = \phi_j|_{\mathcal{K}}$ et où pour toutes fonctions f et g , et tous intervalles $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ on note

$$[f, g]_{\partial I \setminus \partial J} = f(b)g(b)\delta_{b \neq c \text{ et } b \neq d} - f(a)g(a)\delta_{a \neq c \text{ et } a \neq d},$$

$$[f, g]_{\partial I \cap \partial J} = f(b)g(b)\delta_{b=c \text{ ou } b=d} - f(a)g(a)\delta_{a=c \text{ ou } a=d}.$$

Dans l'expression précédente, pour tout $x \in \partial \mathcal{T}_h$, les sauts 1D $\llbracket u \rrbracket_x^K$ représente les sauts de u en chaque point x de la frontière $\partial \mathcal{K}$ qui est défini comme suit :

- si $x \in \partial \mathcal{T}_h^i$, alors $x = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ pour $\mathcal{K}' \in \mathcal{T}_h$, et $\llbracket v \rrbracket_x^K = v|_{\mathcal{K}'}(x) - v|_{\mathcal{K}}(x)$;
- si $x \in \partial \mathcal{T}_h^e$, alors $x = \mathcal{K} \cap \partial \Omega$ pour $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, et $\llbracket v \rrbracket_x^K = -v|_{\mathcal{K}}(x)$.

De même, par la suite nous utiliserons la notation suivante pour la moyenne en un point x de la frontière $\partial \mathcal{K}$ définie par :

- si $x \in \partial \mathcal{T}_h^i$, alors $x = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ pour $\mathcal{K}' \in \mathcal{T}_h$, et $\{v\}_x^K = (v|_{\mathcal{K}'}(x) + v|_{\mathcal{K}}(x))/2$;
- si $x \in \partial \mathcal{T}_h^e$, alors $x = \mathcal{K} \cap \partial \Omega$ pour $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, et $\{v\}_x^K = v|_{\mathcal{K}}(x)$.

Choix des coefficients pour le schéma GD1D

De manière analogue au système 3D, le choix des coefficients $(\alpha_x^K, \beta_x^K, \gamma_x^K, \chi_x^K)$ pour la résolution numérique du schéma GD1D est donné par l'étude de l'énergie :

$$\mathcal{E}_{1D}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{1D,\mathcal{K}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} (\varepsilon E_{\mathcal{K}}^2 + \mu H_{\mathcal{K}}^2) dx, \quad (2.3)$$

et nous avons les résultats suivants :

Proposition 2.1 *Le problème (2.2) est équivalent au problème de Maxwell (2.1) sous les conditions sur $(\alpha_x^K, \beta_x^K, \gamma_x^K, \chi_x^K)$ suivantes :*

- $\forall x = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \in \partial \mathcal{T}_h^i$, $\alpha_x^K = \alpha_x^{K'}$, $\chi_x^K = \chi_x^{K'}$ et $\beta_x^K + \beta_x^{K'}, \gamma_x^K + \gamma_x^{K'} \neq 0$,
- $\forall x \subset \partial \mathcal{K} \in \partial \mathcal{T}_h^e$, $\beta_x^K, \chi_x^K = 0$ et γ_x^K ou $\alpha_x^K \neq 0$.

Théorème 2.2 *Si $(\alpha_x^K, \beta_x^K, \gamma_x^K, \chi_x^K)$ vérifient les propriétés suivantes :*

- $\forall x = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \in \partial \mathcal{T}_h^i$, $\beta_x^K = \gamma_x^{K'}$, $\beta_x^{K'} = \gamma_x^K$, $\beta_x^K + \beta_x^{K'} = -1$, $\gamma_x^K + \gamma_x^{K'} = -1$ et $\alpha_x^K = \alpha_x^{K'} (= \alpha_x) \geq 0$, $\chi_x^K = \chi_x^{K'} (= \chi_x) \geq 0$,
- $\forall \Gamma \subset \partial \mathcal{K} \in \partial \mathcal{T}_h^e$, $\beta_x^K = 0$, $\chi_x^K = \chi_x = 0$, $\gamma_x^K = -1$ et $\alpha_x^K (= \alpha_x) \geq 0$,

alors, pour tout $t \in (0, T)$:

$$\mathcal{E}_{1D}(t) \leq \left(\mathcal{E}_{1D}(0) + \int_0^t \left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} J_s \right\|^2 dx \right) e^t. \quad (2.4)$$

De plus, si on suppose que les termes σ et $J_s = 0$ sont nuls et que $\alpha = \chi = 0$, on a une conservation de l'énergie, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_{1D}(t) = \mathcal{E}_{1D}(0). \quad (2.5)$$

En accord avec la proposition 2.1 et le théorème 2.2, nous utiliserons deux types de flux :

- les flux centrés :
 - $\forall x = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \in \partial \mathcal{T}_h^i, \beta_x^{\mathcal{K}} = \beta_x^{\mathcal{K}'} = -\frac{1}{2}, \gamma_x^{\mathcal{K}} = \gamma_x^{\mathcal{K}'} = -\frac{1}{2}, \text{ et } \alpha_x = \chi_x = 0,$
 - $\forall x \subset \partial \mathcal{K} \in \partial \mathcal{T}_h^e, \alpha_x = \beta_x^{\mathcal{K}} = \chi_x^{\mathcal{K}} = 0 \text{ et } \gamma_x^{\mathcal{K}} = -1,$
- les flux décentrés :
 - $\forall x = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \in \partial \mathcal{T}_h^i, \beta_x^{\mathcal{K}} = \beta_x^{\mathcal{K}'} = -\frac{1}{2}, \gamma_x^{\mathcal{K}} = \gamma_x^{\mathcal{K}'} = -\frac{1}{2}, \alpha_x = \frac{\lambda}{Z_x}, \chi_x = \frac{\lambda}{Y_x},$ où $\lambda > 0$ est un paramètre de pénalisation des flux, et où Z_x et Y_x sont respectivement les impédances et admittances moyennes données par $Z_x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (Z(x-\epsilon) + Z(x+\epsilon))/2$ et $Y_x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (Y(x-\epsilon) + Y(x+\epsilon))/2$, pour tout point $x \in \partial \mathcal{K} \cap \partial \mathcal{K}'$,
 - $\forall x \subset \partial \mathcal{K} \in \partial \mathcal{T}_h^e, \alpha_x = \beta_x^{\mathcal{K}} = \chi_x^{\mathcal{K}} = 0 \text{ et } \gamma_x^{\mathcal{K}} = -1.$

Schéma GD1D

De façon analogue au schéma 3D vu en chapitre 1, le système (2.2) se discrétise en espace et en temps par un schéma GD1D-*leap-frog* sur un espace d'approximation :

$$V_h = \{ \phi \in L^2(\Omega) / \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \phi|_{\mathcal{K}} \in Q_{r_{\mathcal{K}}}(\mathcal{K}) \},$$

où $r_{\mathcal{K}}$ est l'ordre d'approximation polynomial dans l'intervalle $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$. Pour définir une base de l'espace V_h , nous procédons comme en 3D (voir section 1.2.2.1) en utilisant la transformation $F_{\mathcal{K}}$ envoyant un élément \mathcal{K} quelconque de \mathcal{T}_h sur l'élément de référence $\hat{\mathcal{K}} = [0, 1]$. Les fonctions de base prises sur $Q_{r_{\mathcal{K}}}(\hat{\mathcal{K}})$, précédemment notées $\hat{\varphi}_i$ ($i = 1, \dots, r_{\mathcal{K}} + 1$), sont les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux points de Gauss d'ordre $r_{\mathcal{K}}$. La base choisie pour V_h , notée \mathcal{B}_h^{1D} , est finalement

$$\mathcal{B}_h^{1D} = \left\{ \varphi_{i,\mathcal{K}} \mathbb{1}_{\mathcal{K}} := \left(\frac{1}{h_{\mathcal{K}}} \hat{\varphi}_i \circ F_{\mathcal{K}} \right) \mathbb{1}_{\mathcal{K}}, i \in \{1; \dots; r_{\mathcal{K}} + 1\}, \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\},$$

où $h_{\mathcal{K}}$ est la mesure de l'intervalle \mathcal{K} . Enfin, une fonction $u_h \in V_h$ se décompose en

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \forall \hat{x} \in \hat{\mathcal{K}}, u_h|_{\mathcal{K}} \circ F_{\mathcal{K}}(\hat{x}) = \frac{1}{h_{\mathcal{K}}} \sum_{i \in \{1; \dots; r_{\mathcal{K}} + 1\}} u_{i,\mathcal{K}}(\hat{x}) \hat{\varphi}_i(\hat{x}),$$

où $\{u_{i,\mathcal{K}}, i \in \{1; \dots; r_{\mathcal{K}} + 1\}, \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\}$ sont les degrés de liberté de u_h .

En suivant les mêmes étapes que dans les sections 1.2.2.1 et 1.2.2.2, on obtient finalement le schéma GD1D suivant :

Pour tout $n \in \{0; \dots; N-1\}$, trouver $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}}) \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{B}_h^{1D})} \times \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{B}_h^{1D})}$ tel que :

$$\begin{cases} M_\varepsilon \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} + R\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} + M_\sigma \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n+1}}{2} + M_1 \mathbf{J}_s^{n+\frac{1}{2}} = S_d^{\frac{\lambda}{Z_x}} \mathbf{E}^n + S_c^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \\ M_\mu \frac{\mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + R\mathbf{E}^{n+1} = S_d^{\frac{\lambda}{Y_x}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} + S_c^{-\frac{1}{2}} \mathbf{E}^{n+1} + S_{db}^Z \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} + S_{cb}^{-1} \mathbf{E}^{n+1}. \end{cases} \quad (2.6)$$

où les matrices M_T , R , S_{cb}^θ , S_{db}^θ , S_c^θ et S_d^θ représentent les formes bilinéaires suivantes calculées sur les fonctions de base de \mathcal{B}_h^{1D} :

$$\begin{aligned} (M_T)_{ij} &= \int_{\Omega} T \phi_j \cdot \phi_i \, d\mathbf{x}, \text{ pour } T \in \{\varepsilon, \mu, \sigma, 1\}, \quad (R)_{ij} = \int_{\Omega} \partial_x \phi_j \cdot \phi_i \, d\mathbf{x}, \\ (S_c^\theta)_{ij} &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\theta_x^\mathcal{K} [\phi_j \mathbf{n}_x]^\mathcal{K}_x, \phi_i \mathcal{K} \right]_{\partial \mathcal{K} \setminus \partial \Omega}, \quad (S_{cb}^\theta)_{ij} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\theta_x^\mathcal{K} [\phi_j \mathbf{n}_x]^\mathcal{K}_x, \phi_i \mathcal{K} \right]_{\partial \mathcal{K} \cap \partial \Omega} \\ (S_d^\theta)_{ij} &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\theta_x^\mathcal{K} [\phi_j \mathcal{K}]^\mathcal{K}_x, \phi_i \mathcal{K} \right]_{\partial \mathcal{K} \setminus \partial \Omega}, \quad (S_{db}^\theta)_{ij} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\theta_x^\mathcal{K} [\phi_j \mathcal{K}]^\mathcal{K}_x, \phi_i \mathcal{K} \right]_{\partial \mathcal{K} \cap \partial \Omega}. \end{aligned}$$

où i et j parcourent une numérotation globale des fonctions de \mathcal{B}_h^{1D} .

Condition de stabilité sur le schéma GD1D

Comme dans le cas 3D, l'écriture du schéma (2.6) suggère la quantité suivante :

$$\mathcal{E}_h^n = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^n = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} \left(\varepsilon E_{\mathcal{K}}^n \cdot E_{\mathcal{K}}^n + \mu H_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_{\mathcal{K}}^{n-\frac{1}{2}} \right) d\mathbf{x}, \quad (2.7)$$

ainsi que l'« énergie discrète modifiée »

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_h^n &= \mathcal{E}_h^n + \sum_{x \in \cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \partial \mathcal{K}} \left(-\frac{\lambda \Delta t}{2Z_x} \left(\llbracket E^n \rrbracket_x^\mathcal{K} \right)^2 + \frac{\lambda \Delta t}{2Y_x} \left(\llbracket H^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_x^\mathcal{K} \right)^2 \right) \\ &\quad + \sum_{x \in \partial \Omega} \frac{Z_x \Delta t}{2} \left(\llbracket H^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_x^\mathcal{K} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

qui coïncide avec l'énergie discrète (2.7) dans le cas des flux centrés ($\lambda = 0$). Enfin, toutes les intégrales sont supposées calculées selon la formule de quadrature (1.16).

Il vient alors le résultat préliminaire suivant :

Proposition 2.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans le cas d'un calcul en flux centrés, on obtient*

$$\mathcal{E}_h^{n+1} = \mathcal{E}_h^n - \Delta t \sum_{x \in \partial \Omega} Z_x \left(\left(\llbracket H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x^\mathcal{K} \right)^2 + H^{n-\frac{1}{2}}(x) H^{n+\frac{1}{2}}(x) \right),$$

qui entraîne la conservation de l'énergie dans le cas $\mathcal{Z} = 0$. Dans le cas d'un calcul en flux décentrés, si $\lambda > 0$, alors l'énergie discrète modifiée décroît :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_h^{n+1} \leq \widetilde{\mathcal{E}}_h^n.$$

Démonstration. Ce résultat est un cas particulier de la proposition 2.7. Il suffit de prendre $V_h^{n+1} = V_h^n$, ce qui entraîne $\mathcal{F}_K^{n+1} = \mathcal{F}_K^n (\forall K \in \mathcal{T}_h)$, $\tilde{\mathbf{E}}^n = \mathbf{E}^n$ et $\tilde{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$. ■

De même, on donne la condition CFL sur le schéma 1D à travers le résultat suivant :

Théorème 2.4 *Le schéma GD1D (2.2) est stable sous la condition :*

$$\Delta t < \frac{2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} c_{\max}^{-1} h_K}{\left(2(\lambda + 1) + \max_{x \in \partial\Omega \cap \partial K} (1, \mathcal{Z}_x Y_{\min}) \right) \rho_{\mathcal{B}_{r_K}} + \sqrt{\rho_{\mathcal{B}_{r_K}}}}, \quad (2.9)$$

où $c_{\max} = 1/\sqrt{\varepsilon_{\min}\mu_{\min}}$, $Y_{\min} = \sqrt{\mu_{\min}/\varepsilon_{\min}}$, $\rho_{\mathcal{B}_{r_K}}$ est la plus grande valeur propre de la matrice $\mathcal{M}_{r_K}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r_K} \mathcal{M}_{r_K}^{-\frac{1}{2}}$, $\rho_{\mathcal{R}_{r_K}}$ est la plus grande valeur propre de la matrice $\mathcal{M}_{r_K}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{r_K} \mathcal{M}_{r_K}^{-\frac{1}{2}}$, avec

$$(\mathcal{M}_{r_K})_{ij} = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j dx, (\mathcal{R}_{r_K})_{ij} = \int_{\hat{K}} \partial_x \hat{\varphi}_i \partial_x \hat{\varphi}_j dx, (\mathcal{B}_{r_K})_{ij} = \int_{\partial \hat{K}} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j ds,$$

où $(\hat{\varphi}_i)_{i=1,\dots,r_K}$ sont les polynômes de Lagrange associés aux nœuds de Gauss d'ordre r_K sur l'élément-unité $\hat{K} = [0, 1]$.

Démonstration. Le point clé est de montrer que la forme quadratique $\widetilde{\mathcal{E}}_h^n$, vue comme une fonction de $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$, est définie positive. Tout d'abord, par la seconde équation de (2.6) prise au temps t^n contre $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$, on en déduit l'expression de $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mu H_K^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_K^{n-\frac{1}{2}} dx$ que l'on reporte dans la définition de $\widetilde{\mathcal{E}}_h^n$ (2.8). En appliquant les inégalités $ab \leq \frac{1}{2Z_x} a^2 + \frac{Z_x}{2} b^2$ sur les termes de bord en $(E_K^n, H_K^{n+\frac{1}{2}})$, et $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$ sur les autres termes de bord, nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{E}}_h^n &\geq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\varepsilon E_K^n \cdot E_K^n + \mu H_K^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_K^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \partial_x E_K^n \cdot H_K^{n+\frac{1}{2}} \right) dx \\ &\quad - \sum_{x \in \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \partial K \setminus \partial\Omega =: \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'} \left(\left(\frac{\lambda \Delta t}{2Z_x} + \frac{\Delta t}{2Z_x} \right) \left(\llbracket E^n \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right)^2 + \frac{\lambda \Delta t}{2Y_x} \left(\llbracket H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{Z_x \Delta t}{2} \left(\frac{H_K^{n+\frac{1}{2}}(x) + H_{K'}^{n+\frac{1}{2}}(x)}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad - \sum_{x \in \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \partial K \cap \partial\Omega} \left(\frac{Z_x \Delta t}{2} H_K^{n+\frac{1}{2}}(x)^2 + \frac{\Delta t}{2Z_x} E_K^n(x)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\left| \int_{\mathcal{K}} \partial_x E_{\mathcal{K}}^n H_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} dx \right| \leq \left\| \mu^{\frac{1}{2}} H_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{K}} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x E_{\mathcal{K}}^n \right\|_{\mathcal{K}}. \quad (2.11)$$

Soient $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n$ et $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{r_{\mathcal{K}}+1}$ les vecteurs des inconnues redimensionnées de la cellule \mathcal{K} $\sqrt{\varepsilon_{\max}} E_{\mathcal{K}}^n$ et $\sqrt{\mu_{\max}} H_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}}$ exprimées dans la base \mathcal{B}_h^{1D} restreinte aux éléments à support dans \mathcal{K} . En utilisant le changement de variable de \mathcal{K} sur $\hat{\mathcal{K}}$ sous les signes sommes, (2.11) est majorée par

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{h_{\mathcal{K}}} \left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \right\| \sqrt{\frac{\left(\mathcal{B}_{r_{\mathcal{K}}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \right) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n}{\mu_{\min} \varepsilon_{\max} h_{\mathcal{K}}}} \\ &\leq \frac{c_{\max}}{2} \sqrt{\rho \left(\mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r_{\mathcal{K}}} \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{-\frac{1}{2}} \right)} \left(\left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

De la même manière, les termes de bord dans (2.10) sont minorés par

$$\begin{aligned} &\geq - \sum_{x \in \cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \partial \mathcal{K} \setminus \partial \Omega} \Delta t \left(\frac{\lambda+1}{Z_x} E_{\mathcal{K}}^n(x)^2 + \frac{\lambda+1}{Y_x} H_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}}(x)^2 \right) \\ &\quad - \sum_{x \in \cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{K} \cap \partial \Omega} \Delta t \left(\frac{1}{2Z_x} E_{\mathcal{K}}^n(x)^2 + \frac{Z_x}{2} H_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}}(x)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

En considérant un point du maillage $x = x_l^{\mathcal{K}} = x_r^{\mathcal{K}'} \notin \partial \Omega$ où $\mathcal{K} \neq \mathcal{K}'$ nous avons

$$\frac{1}{Z_x} \leq \max \left(\frac{2c_{x_l^{\mathcal{K}}} \varepsilon_{x_l^{\mathcal{K}}}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{x_l^{\mathcal{K}}} \mu_{x_r^{\mathcal{K}'}}}{\varepsilon_{x_r^{\mathcal{K}'}} \mu_{x_l^{\mathcal{K}}}}}}, \frac{2c_{x_r^{\mathcal{K}'}} \varepsilon_{x_r^{\mathcal{K}'}}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{x_r^{\mathcal{K}'}} \mu_{x_l^{\mathcal{K}}}}{\varepsilon_{x_l^{\mathcal{K}}} \mu_{x_r^{\mathcal{K}'}}}}} \right) \leq 2c_{\max} \varepsilon_{\max},$$

où l'indice $x_l^{\mathcal{K}}$ (resp. $x_r^{\mathcal{K}'}$) sur une fonction $f \in \{\varepsilon, \mu, c\}$ indique que la valeur de f en ce point doit être prise au sens de la limite quand $z \rightarrow x_l^{\mathcal{K}}$ (resp. $z \rightarrow x_r^{\mathcal{K}'}$) avec $z \in \mathcal{K}$ (resp. $z \in \mathcal{K}'$), et $c(z) := 1/\sqrt{\varepsilon(z)\mu(z)} \leq c_{\max}$ est la vitesse de la lumière dans le milieu. En procédant de même, on trouve $1/Y_x \leq 2c_{\max} \mu_{\max}$. Notons enfin que les sauts et moyennes des champs au point $x \in \partial \mathcal{K} \cap \partial \mathcal{K}'$ vérifient

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\min} \left(\llbracket E^n \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right)^2 \text{ et } \varepsilon_{\min} \left(\frac{E_{\mathcal{K}}^n(x) + E_{\mathcal{K}'}^n(x)}{2} \right)^2 \\ &\leq \rho \left(\mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r_{\mathcal{K}}} \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{-\frac{1}{2}} \right) \left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \right\|^2 + \rho \left(\mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}'}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r_{\mathcal{K}'}} \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}'}}^{-\frac{1}{2}} \right) \left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}'}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}'}^n \right\|^2, \\ &\mu_{\min} \left(\llbracket H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right)^2 \text{ et } \mu_{\min} \left(\frac{H_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}}(x) + H_{\mathcal{K}'}^{n+\frac{1}{2}}(x)}{2} \right)^2 \\ &\leq \rho \left(\mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r_{\mathcal{K}}} \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{-\frac{1}{2}} \right) \left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \rho \left(\mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}'}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r_{\mathcal{K}'}} \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}'}}^{-\frac{1}{2}} \right) \left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{K}'}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}'}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2, \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (2.12) se minore par

$$\begin{aligned} \geq & - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \Delta t c_{\max} \left[(\lambda + 1) + \frac{1}{2} \max_{x \in \partial\Omega \cap \partial\mathcal{K}} \left(1, \mathcal{Z}_x \sqrt{\frac{\varepsilon_{\min}}{\mu_{\min}}} \right) \right] \\ & \times \rho \left(\mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r\mathcal{K}} \mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\left\| \mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \right\|^2 + \left\| \mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Finalement, (2.10) devient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}^n \geq & \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left(\left\| \mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n \right\| + \left\| \mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \right\| \right) \left(h_{\mathcal{K}} - \frac{\Delta t c_{\max}}{2} \sqrt{\rho \left(\mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r\mathcal{K}} \mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \right)} \right. \\ & \left. - \Delta t c_{\max} \left((\lambda + 1) + \frac{1}{2} \max_{x \in \partial\Omega \cap \partial\mathcal{K}} \left(1, \mathcal{Z}_x \sqrt{\frac{\varepsilon_{\min}}{\mu_{\min}}} \right) \right) \rho \left(\mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{r\mathcal{K}} \mathcal{M}_{r\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \right) \right), \end{aligned}$$

qui est définie positive sous la condition (2.9). ■

2.1.2 Illustration du phénomène d'instabilité pour le GD1D

Afin de mettre en avant une instabilité spécifique liée au choix de l'opérateur d'interpolation utilisé lors du changement d'espace d'approximation entre deux itérations temporelles, nous proposons des exemples illustratifs en 1D.

Premier exemple

Nous considérons le problème de Maxwell 1D (2.1), ainsi que sa discrétisation par un schéma GD1D-*leap-frog* donné par (2.2) sur le domaine $\Omega = [0; 3]$. Nous évaluons numériquement la propagation de la valeur initiale :

$$E_0(x) = \exp \left(\frac{1}{0.09} - \frac{1}{(1.8 - x)(x - 1.2)} \right) \mathbb{1}_{]1.2, 1.8[}(x), \text{ et } H_0(x) = 0,$$

dans un domaine avec des conditions bord de type Silver-Müller ($\mathcal{Z} = 1$). La solution analytique du problème (2.1) est alors donnée par :

$$E(t, x) = \frac{1}{2} [E_0(x - ct) + E_0(x + ct)] \text{ et } H(t, x) = \frac{\varepsilon c}{2} [E_0(x - ct) - E_0(x + ct)].$$

Afin de quantifier les effets de l'interpolation, nous nous donnons une trame pré-définie de maillage évolutif. À chaque pas de temps, nous changeons entre deux espaces d'approximation uniformes :

- aux pas de temps pairs, les cellules ne seront pas subdivisées ($k = 1$) et nous fixons l'ordre polynomial à $r = 3$ (référéncé comme $h, r = 3$),
- aux pas de temps impairs, les cellules sont subdivisées ($k = 2$) et nous fixons l'ordre polynomial à $r = 2$ (noté $h/2, r = 2$).

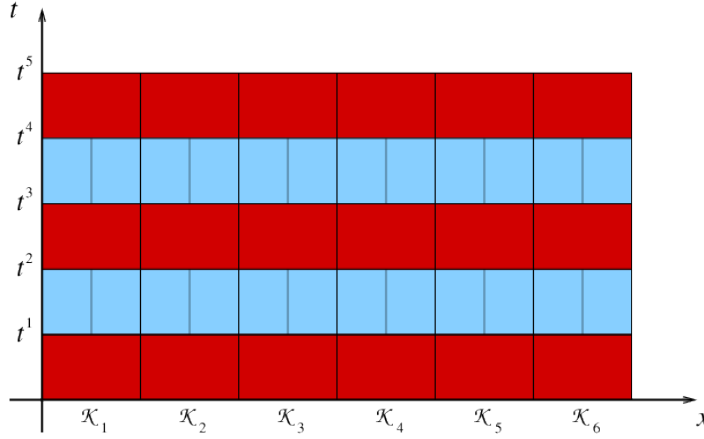


FIGURE 2.1: Présentation des espaces d'approximations employés : ordre $r = 2$ (bleu) et ordre $r = 3$ (rouge)

L'évolution de l'espace d'approximation est représentée sur la figure 2.1.

Nous fixons la longueur de chaque intervalle avant tout raffinement à $h = 2.e-2$. Le pas de temps est fixé à $\Delta t = 1.e-3$, afin de satisfaire aux deux conditions CFL (2.9) correspondant aux maillages statiques données par les deux espaces d'approximation utilisés (en $h, r = 3$ et $h/2, r = 2$). Ainsi, nous espérons garantir la stabilité en gardant les conditions du problème sur maillage statique.

Nous testons ici deux opérateurs d'interpolation, obtenus de l'interpolation lagrangienne (LI) et de la méthode des moindres carrés (LSM). Ces méthodes de régression sont connues pour leur simplicité de calcul et leurs formulations analytiques : l'interpolation lagrangienne peut être facilement calculée pour des ordres polynômiaux élevés, et la méthode des moindres carrés est connue pour minimiser l'erreur résiduelle quadratique et assurer une bonne approximation.

La figure 2.2 compare les champs numériques pour chaque méthode d'interpolation à la solution analytique (notée « Analytic » dans les figures suivantes) au point $x = 1.8$ pour des calculs en flux centrés ($\lambda = 0$) et en flux décentrés ($\lambda = 0.5$).

Nous remarquons sur cette figure que, dans le cas des flux centrés, les deux techniques d'interpolation génèrent une solution instable, malgré le respect des conditions de stabilité CFL. Ceci montre l'importance du choix de l'opérateur d'interpolation. Toutefois, ce phénomène ne semble pas apparaître dans le cas décentré avec projection L^2 . Aussi, afin de prolonger cette étude, nous proposons un second exemple montrant que les flux décentrés peuvent aussi produire ce genre d'instabilité.

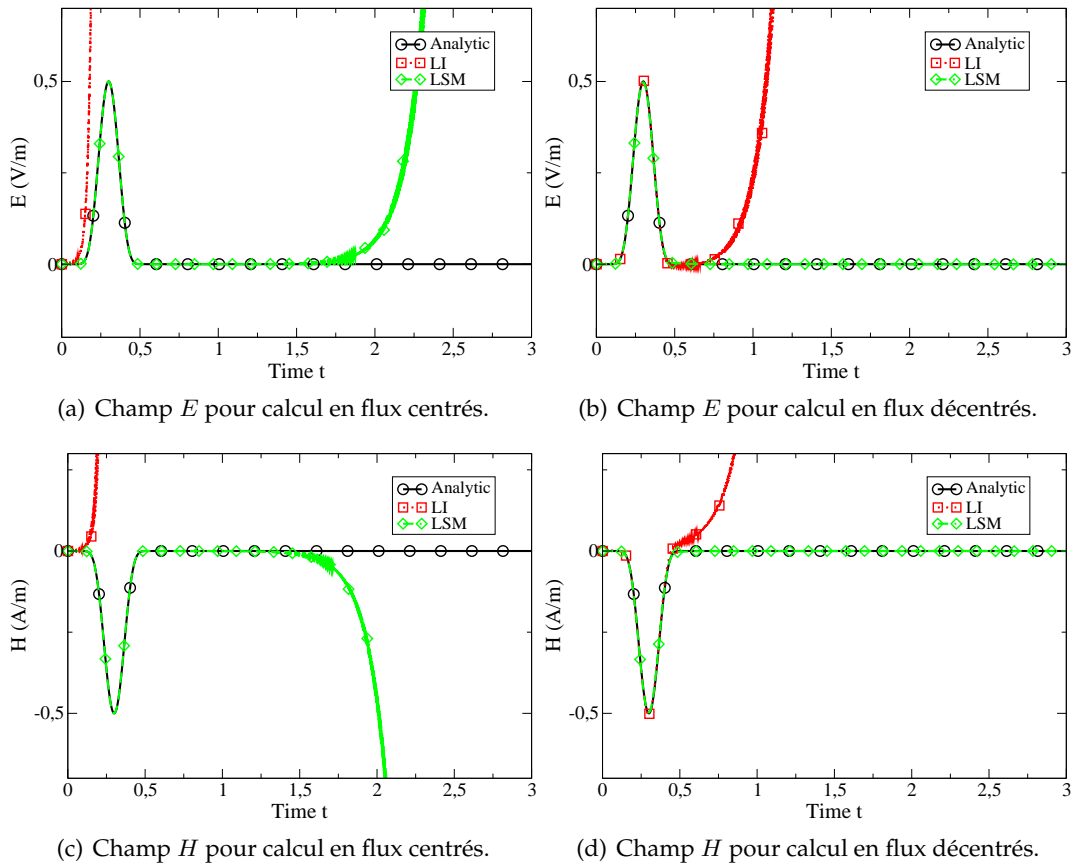


FIGURE 2.2: Propagation sur maillage dynamique dans un milieu libre.

Second exemple

Comme second exemple, nous résolvons toujours le système (2.1) pour la condition initiale :

$$E_0(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \mathbb{1}_{]0,3[}(x) \text{ et } H_0(x) = 0,$$

et en imposant des conditions de bord métalliques ($\mathcal{Z} = 0$). Dans ce cas, la forme de la solution exacte est donnée par

$$E(t, x) = \frac{1}{2} (E_0(\xi_-) + E_0(\xi_+)) \text{ et } H(t, x) = \frac{\varepsilon c}{2} (E_0(\xi_-) - E_0(\xi_+)), \quad (2.13)$$

où $\xi_{\pm} \equiv x \pm ct \pmod{3}$.

En utilisant les mêmes paramètres d'approximation que précédemment, nous obtenons la figure 2.3, qui donne les champs numériques au point $x = 1.8$ pour les cas flux centrés ($\lambda = 0$) et décentrés ($\lambda = 0.5$).

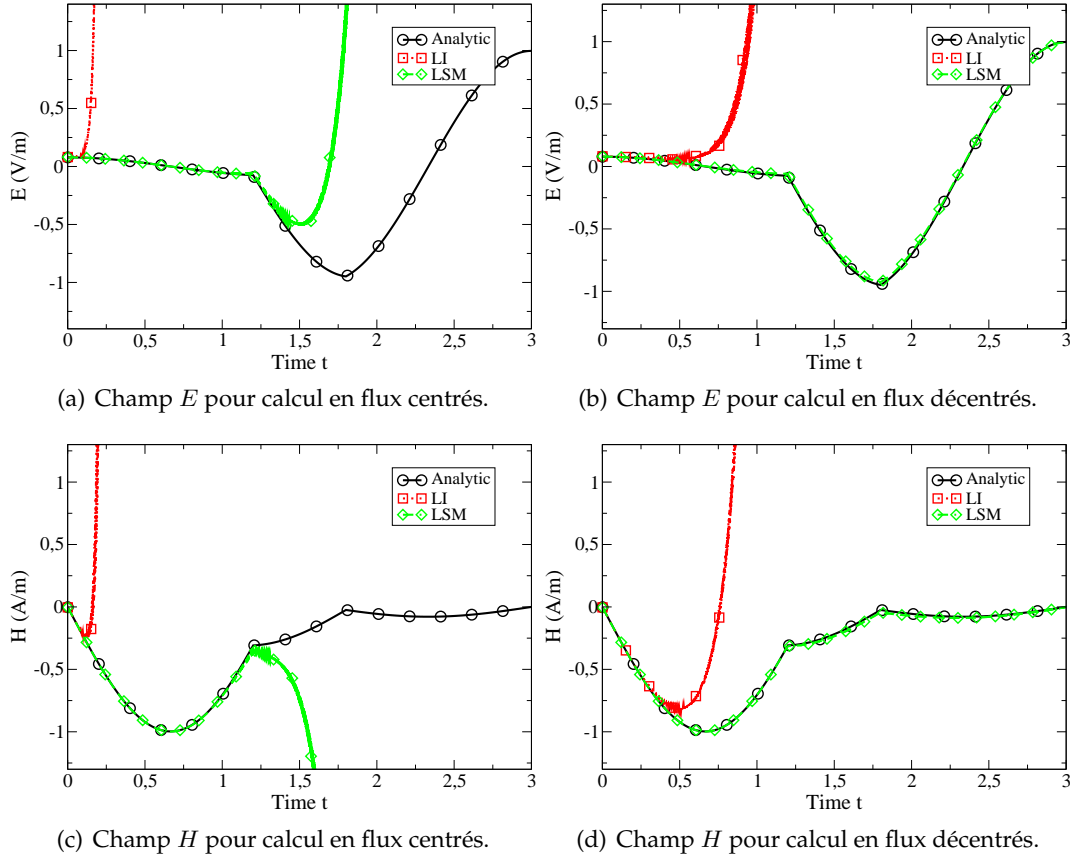


FIGURE 2.3: Tests sur des opérateurs d'interpolation usuels (cas du sinus).

Nous remarquons que ces nouveaux résultats montrent à nouveau une instabilité dans le calcul avec des flux centrés, en dépit de la condition de stabilité pourtant satisfaite. De

plus, nous pouvons constater que pour les flux décentrés, nous n'avons pas convergence dans le cas de l'interpolation lagrangienne. Mais, une fois encore, l'interpolation L^2 avec flux décentrés semble parfaitement stable. Pour vérifier plus précisément cela, nous poussons le calcul plus loin en temps et nous représentons les résultats obtenus dans ce cas sur la figure 2.4.

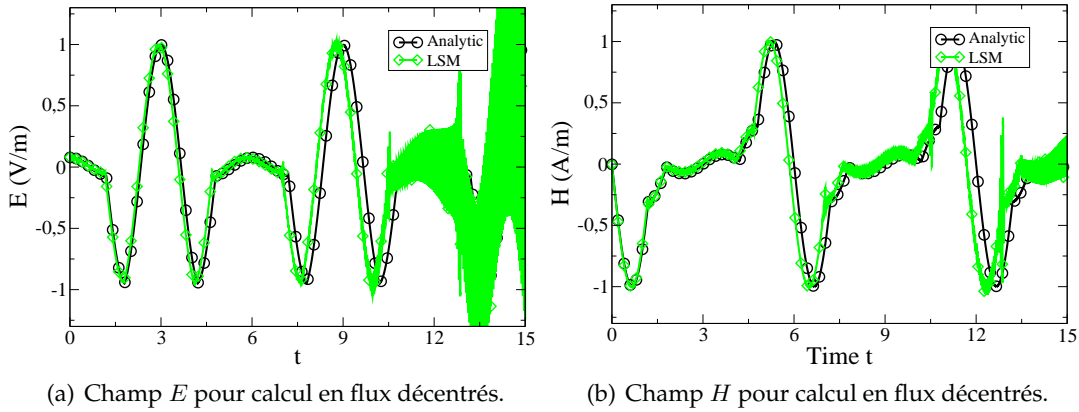


FIGURE 2.4: Tests sur des opérateurs d'interpolation usuels (cas du sinus).

La figure 2.4 permet de voir que l'instabilité apparaît également sur le calcul avec interpolation L^2 , mais le décentrement permet de retarder cet effet. Ainsi, dans ce cas, utiliser les flux décentrés n'est pas suffisant pour assurer la stabilité. Cette instabilité semble donc bien liée au choix de l'opérateur d'interpolation et aucune des deux méthodes proposées (interpolation lagrangienne ou L^2) ne convient. Nous allons donc tenter de développer un opérateur d'interpolation efficace pour notre problème permettant de contrôler et éviter cette instabilité.

Remarque 2.5 Nous pouvons noter que, afin de donner une première explication possible à ce phénomène d'instabilité, les deux espaces d'approximation choisis n'ont aucune relation d'ordre entre eux au sens de l'inclusion : le premier n'est pas inclus dans le second, et inversement. Ainsi, la solution doit être interpolée à chaque pas de temps et sur cet exemple, une erreur est donc a priori commise à chaque opération. Enfin, les résultats sur la stabilité du schéma 1D sur maillage fixe n'ont plus de sens, parce qu'ils ont été obtenus pour un calcul sur maillage statique et ne prennent donc pas en compte l'introduction de l'opérateur d'interpolation.

Enfin, il apparaît que l'obtention d'une « vraie » condition CFL pour le calcul GD adaptatif est nécessaire.

2.2 Construction du projecteur adapté au schéma GD1D évolutif

Dans cette partie nous construisons explicitement un opérateur d'interpolation adapté au traitement du schéma GD1D dans le cas d'une évolution de maillage.

Le déroulement de la construction de cet opérateur est le suivant :

1. Dans un premier temps nous introduisons la notion d'espace d'approximation évolutif dans la construction du schéma GD1D. Ainsi, l'espace d'approximation V_h devient dépendant de l'itération n du calcul en cours et est donc référencé par V_h^n . Donc, dans le schéma GD1D (2.6) pris à l'étape $n + 1$, le terme de condition initiale $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ est dans $(V_h^n)^2$ alors que la solution $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}})$ est recherchée dans $(V_h^{n+1})^2$. Par conséquent, nous faisons apparaître la projection $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ de $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ sur $(V_h^{n+1})^2$. L'étude de la stabilité du schéma GD1D évolutif ainsi obtenu montre alors que le bilan d'énergie correspondant à ce schéma n'est plus correctement signé même sous l'hypothèse CFL du théorème 2.4. Nous en déduisons donc des propriétés, notées (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) , nécessaires pour vérifier respectivement la stabilité et la consistance.
2. Dans la deuxième partie de cette section, nous proposons un opérateur de projection, noté $\Pi^{n+1} : (V_h^n)^2 \rightarrow (V_h^{n+1})^2$ défini implicitement par un problème d'optimisation. Nous montrons tout d'abord que cet opérateur est bien défini, puis nous l'explicitons pour chaque cellule \mathcal{K} d'un maillage de référence grossier \mathcal{T}_h (pour tout n , le maillage utilisé à l'étape n est vu comme un raffinement de \mathcal{T}_h) dans les cas $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ et $V_h^n|_{\mathcal{K}} \not\subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$.
3. Dans la dernière partie, nous montrons que l'opérateur Π^{n+1} permet de vérifier asymptotiquement les conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) précédemment formulées, et nous donnons aussi un contrôle *a posteriori* optimal de l'erreur introduite par la réalisation de la projection par Π^{n+1} . Ces résultats permettent en même temps d'en déduire une condition CFL pour le schéma GD1D évolutif.

Les validations numériques sur les exemples présentés précédemment seront effectuées dans la section 2.3.

2.2.1 Travail préliminaire

Dans cette section, nous reformulons le schéma GD1D (2.6) dans le cas d'un espace d'approximation évolutif au cours du calcul. Nous reprenons alors l'étude de stabilité dans ce cas, ce qui nous permet d'expliquer les phénomènes d'instabilité observés à la section 2.1.2. Finalement, nous en déduisons des conditions supplémentaires à vérifier afin d'obtenir la consistance et la stabilité dans le contexte évolutif.

2.2.1.1 Formulation du schéma GD1D évolutif

En reprenant le schéma présenté dans la section 2.1.1, nous allons à partir de maintenant supposer que l'espace d'approximation V_h peut être modifié à chaque itération n du calcul :

- soit par modification locale du degré de raffinement du maillage par rapport à un maillage initial \mathcal{T}_h (évolution en h),
- soit par modification locale de l'ordre d'approximation polynomial (évolution en p),
- soit par les deux (évolution hp).

Nous indiquons donc l'espace d'approximation par le numéro de l'itération en cours : V_h^n . Par analogie, le maillage associé à l'espace V_h^n sera noté \mathcal{T}_h^n .

Nous supposons donc que la donnée des espaces $(V_h^n)_n$ vérifie la relation d'inclusion suivante sur les maillages :

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \exists \mathcal{I} \subset \mathcal{T}_h^n / \mathcal{K} = \cup_{\mathcal{L} \in \mathcal{I}} \mathcal{L}.$$

Le maillage \mathcal{T}_h est donc vu comme un maillage "grossier" de référence, et l'ensemble des \mathcal{T}_h^n présentent potentiellement des raffinements locaux de ce maillage.

A l'étape $n + 1$, comme la condition initiale $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ est dans $V_h^n \times V_h^n$ et que la solution recherchée $(E^{n+1}, H^{n+\frac{3}{2}})$ est dans $V_h^{n+1} \times V_h^{n+1}$, nous devons donc interpoler cette donnée initiale pour pouvoir effectuer le calcul. Nous ne faisons pour l'instant aucune hypothèse sur l'opérateur d'interpolation. Ainsi, soit $P^{n+1} : V_h^n \times V_h^n \rightarrow V_h^{n+1} \times V_h^{n+1}$ un opérateur d'interpolation donné. Nous notons

$$(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) := P^{n+1}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$$

le champ interpolé utilisé pour le calcul au temps $n + 1$. Avec ces notations, le schéma GD1D (2.6) devient :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (E^{n+1}, H^{n+\frac{3}{2}}) \in V_h^{n+1} \times V_h^{n+1} \text{ tel que : } \forall \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \forall (\varphi, \psi) \in V_h^{n+1}|_{\mathcal{L}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{L}} \\ & \left\{ \begin{aligned} & a_{\mathcal{L}} \left(\varepsilon \frac{E^{n+1} - \check{E}^n}{\Delta t}, \varphi \right) + l_{\mathcal{L}} \left(\check{H}^{n+\frac{1}{2}}, \varphi \right) \\ & = \left[-\frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_x \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x^{\mathcal{L}} + \frac{\lambda}{Z_x} \left[\check{E}^n \right]_x^{\mathcal{L}}, \varphi \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega}, \\ & a_{\mathcal{L}} \left(\mu \frac{H^{n+\frac{3}{2}} - \check{H}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \psi \right) + l_{\mathcal{L}} (E^{n+1}, \psi) \\ & = \left[-\frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_x E^{n+1} \right]_x^{\mathcal{L}} + \frac{\lambda}{Y_x} \left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x^{\mathcal{L}}, \psi \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \\ & \quad + \left[-\left[\mathbf{n}_x E^{n+1} \right]_x^{\mathcal{L}} + Z_x \left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x^{\mathcal{L}}, \psi \right]_{\partial \mathcal{L} \cap \partial \Omega}. \end{aligned} \right. \quad (2.14) \end{aligned}$$

où $V_h^{n+1}|_{\mathcal{L}}$ désigne l'espace des fonctions de V_h^{n+1} restreintes à \mathcal{L} , et avec, pour tout élément $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, les formes bilinéaires définies sur $H^1(\mathcal{K})$:

$$a_{\mathcal{K}}(u, v) = \int_{\mathcal{K}} uv \, dx, \text{ et } l_{\mathcal{K}}(u, v) = \int_{\mathcal{K}} v \partial_x u \, dx,$$

et où pour toutes fonctions f et g , et tous intervalles $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ on note

$$[f, g]_{\partial I \setminus \partial J} = f(b)g(b)\delta_{b \neq c \text{ et } b \neq d} - f(a)g(a)\delta_{a \neq c \text{ et } a \neq d},$$

$$[f, g]_{\partial I \cap \partial J} = f(b)g(b)\delta_{b=c \text{ ou } b=d} - f(a)g(a)\delta_{a=c \text{ ou } a=d}.$$

Remarque 2.6 Le choix de la convention $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \in V_h^n$ n'est qu'arbitraire. Il n'y a aucune contre-indication à imposer $(E^n, H^{n-\frac{1}{2}}) \in V_h^n$, seule l'écriture de notre schéma nous a orienté vers ce choix.

2.2.1.2 Étude de la stabilité du schéma GD1D évolutif

Avec l'introduction des champs interpolés $(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$, les résultats de stabilité vus pour le système sur le maillage statique dans le paragraphe 2.1.1 ne sont *a priori* plus vérifiés. Nous devons dès lors revenir à l'étude de conservation et dissipation de l'énergie du système (2.14). L'énergie discrète correspondante est maintenant donnée par :

$$\mathcal{E}_P^n = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h^n} \mathcal{E}_{P,\mathcal{K}}^n, \text{ avec } \mathcal{E}_{P,\mathcal{K}}^n = \int_{\mathcal{K}} \varepsilon E^n \cdot E^n dx + \int_{\mathcal{K}} \mu H^{n+\frac{1}{2}} \cdot \check{H}^{n-\frac{1}{2}} dx. \quad (2.15)$$

Par analogie avec l'énergie discrète modifiée (2.8), nous définissons l'énergie discrète modifiée 1D par :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{E}}_P^{n+1} := & \mathcal{E}_P^{n+1} + \sum_{x \in \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \left(-\frac{\lambda \Delta t}{2Z_x} \left[E^{n+1} \right]_x^2 + \frac{\lambda \Delta t}{2Y_x} \left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x^2 \right) \\ & + \sum_{x \in \partial \Omega} \frac{Z_x \Delta t}{2} \left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'évolution de l'énergie dans le cas du maillage adaptatif est donnée par le résultat suivant :

Proposition 2.7 (Bilan d'énergie sur maillage évolutif) Avec les notations précédentes, l'évolution de l'énergie sur le domaine Ω au temps $n+1$ pour le schéma GD1D évolutif (2.14) est donnée dans le cas de flux centrés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_P^{n+1} - \mathcal{E}_P^n = & -\Delta t \sum_{x \in \partial \Omega} Z_x \left(\left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x^2 + \check{H}^{n-\frac{1}{2}}(x) H^{n+\frac{1}{2}}(x) \right) \\ & + \Delta t \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

où la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n : V_h^n|_{\mathcal{K}} \times V_h^n|_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par : $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(w, z) :=$

$$\sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^n, \mathcal{L} \subset \mathcal{K}} \left(\frac{a_{\mathcal{L}}(\varepsilon w, w) + a_{\mathcal{L}}(\mu z, z)}{\Delta t} - l_{\mathcal{L}}(z, w) \right) - \sum_{x \in \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^n, \mathcal{L} \subset \mathcal{K}} \partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \llbracket \mathbf{n}_x z \rrbracket_x \{w\}_x.$$

Dans le cas d'un calcul en flux décentrés, si $\lambda > 0$, alors l'énergie discrète modifiée vérifie :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_P^{n+1} - \widetilde{\mathcal{E}}_P^n \leq \Delta t \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \right], \quad (2.18)$$

où $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n : V_h^n|_{\mathcal{K}} \times V_h^n|_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(w, z) := \mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(w, z) - \sum_{\substack{y \in \cup \\ \mathcal{L} \subset \mathcal{K} \\ \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^n}} \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\llbracket w \rrbracket_x^2}{Z_x} + \frac{\llbracket z \rrbracket_x^2}{Y_x} \right) - \sum_{y \in \partial\Omega \cap \partial\mathcal{K}} Z_x \frac{\llbracket z \rrbracket_x^2}{2}.$$

Enfin, si Δt satisfait la condition CFL relativement à chacun des deux espaces V_h^n et V_h^{n+1} alors \mathcal{E}_P^n , \mathcal{E}_P^{n+1} , $\widetilde{\mathcal{E}}_P^n$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_P^{n+1}$ sont des formes quadratiques définies positives.

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme technique suivant sur les termes de bord :

Lemme 2.8 Pour tous $(w, z) \in H^1(\mathcal{T}_h) \times H^1(\mathcal{T}_h)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \partial\mathcal{K}} & \left(-[(\mathbf{n}_x z), w]_{\partial\mathcal{K}} - \left[\frac{1}{2} \llbracket \mathbf{n}_x w \rrbracket_x, z \right]_{\partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega} \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{2} \llbracket \mathbf{n}_x z \rrbracket_x, w \right]_{\partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega} - [\llbracket \mathbf{n}_x w \rrbracket_x, z]_{\partial\mathcal{K} \cap \partial\Omega} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Preuve du lemme 2.8. On écrit (2.19) sous la forme $\sum_{x \in \cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \partial\mathcal{K}} \mathcal{B}_x$. Il apparait deux cas que nous traitons séparément :

- $x \in \partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega$: alors $x = x_l^{\mathcal{K}} = x_r^{\mathcal{K}'}$ pour tout $\mathcal{K} \neq \mathcal{K}'$. Ainsi, en notant $\tilde{\mathbf{n}}$ le vecteur unitaire dirigé de \mathcal{K} vers \mathcal{K}' :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x &= -\tilde{\mathbf{n}}z(x_l^{\mathcal{K}})w(x_l^{\mathcal{K}}) + \tilde{\mathbf{n}}v^{n+\frac{1}{2}}(x_r^{\mathcal{K}'})w(x_r^{\mathcal{K}'}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{n}}w(x_r^{\mathcal{K}'}) - \tilde{\mathbf{n}}w(x_l^{\mathcal{K}}) \right) z(x_l^{\mathcal{K}}) - \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{n}}w(x_r^{\mathcal{K}'}) - \tilde{\mathbf{n}}w(x_l^{\mathcal{K}}) \right) z(x_r^{\mathcal{K}'}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{n}}z(x_r^{\mathcal{K}'}) - \tilde{\mathbf{n}}z(x_l^{\mathcal{K}}) \right) w(x_l^{\mathcal{K}}) - \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{n}}z(x_r^{\mathcal{K}'}) - \tilde{\mathbf{n}}z(x_l^{\mathcal{K}}) \right) w(x_r^{\mathcal{K}'}) = 0. \end{aligned}$$

- $x \in \partial\mathcal{K} \cap \partial\Omega$ si $x = x_l^{\mathcal{K}}$ (un résultat similaire s'obtient pour le cas $x = x_r^{\mathcal{K}} \in \partial\Omega$),

$$\mathcal{B}_x = -\mathbf{n}_{x_l^{\mathcal{K}}} z(x_l^{\mathcal{K}})w(x_l^{\mathcal{K}}) - \left(-\mathbf{n}_{x_l^{\mathcal{K}}} w(x_l^{\mathcal{K}})z(x_l^{\mathcal{K}}) \right) = 0.$$

En reportant les résultats, on obtient l'égalité voulue. ■

Preuve de la proposition 2.7. Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}$ un intervalle donné, et écrivons le système (2.14) pour le couple de fonctions-test $(\varphi, \psi) := \left((E^{n+1} + \check{E}^n)|_{\mathcal{L}}, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{L}} \right) \in V_h^{n+1}|_{\mathcal{L}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{L}}$. Dans un souci de clarté, dans la suite, les restrictions sur \mathcal{L} pour E^{n+1} , \check{E}^n et $\check{H}^{n+\frac{1}{2}}$

seront omises si superflues. Il vient donc :

$$\left\{ \begin{aligned} & a_{\mathcal{L}} \left(\varepsilon \frac{E^{n+1} - \check{E}^n}{\Delta t}, E^{n+1} + \check{E}^n \right) + l_{\mathcal{L}} \left(\check{H}^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1} + \check{E}^n \right) \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_x \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x + \frac{\lambda}{Z_x} \left[\check{E}^n \right]_x \right), E^{n+1} + \check{E}^n \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega}, \\ & a_{\mathcal{L}} \left(\mu \frac{H^{n+\frac{3}{2}} - \check{H}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) + l_{\mathcal{L}} \left(E^{n+1}, \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_x E^{n+1} \right]_x + \frac{\lambda}{Y_x} \left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x \right), \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \\ &\quad + \left[\left(-\left[\mathbf{n}_x E^{n+1} \right]_x + Z_x \left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x \right), \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{L} \cap \partial \Omega}. \end{aligned} \right. \quad (2.20)$$

En additionnant les équations de (2.20) et en faisant une intégration par parties avec $(w, z) := (\check{H}^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{P, \mathcal{L}}^{n+1}}{\Delta t} &= \frac{a_{\mathcal{L}} (\varepsilon \check{E}^n, \check{E}^n) + a_{\mathcal{L}} (\mu \check{H}^{n+\frac{1}{2}}, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta t} - \left[(\mathbf{n}_x \check{H}^{n+\frac{1}{2}}), E^{n+1} \right]_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \\ &\quad - l_{\mathcal{L}} (\check{H}^{n+\frac{1}{2}}, \check{E}^n) + \left[\left(-\frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_x E^{n+1} \right]_x + \frac{\lambda}{Y_x} \left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x \right), \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \\ &\quad + \left[\left(-\left[\mathbf{n}_x E^{n+1} \right]_x + Z_x \left[\check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x \right), \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{L} \cap \partial \Omega} \\ &\quad + \left[\left(-\frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_x \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x + \frac{\lambda}{Z_x} \left[\check{E}^n \right]_x \right), (E^{n+1} + \check{E}^n) \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

D'abord, le regroupement des termes en $(E^{n+1}, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$ donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \partial \mathcal{L}} \left(- \left[\mathbf{n}_x \check{H}^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1} \right]_x^{\mathcal{L}} - \left[\frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_x E^{n+1} \right]_x, \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \right. \\ & \quad \left. - \left[\left[\mathbf{n}_x E^{n+1} \right]_x, \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{L} \cap \partial \Omega} - \left[\frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_x \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x, E^{n+1} \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \right), \end{aligned}$$

qui s'annule selon le lemme 2.8.

Les termes de bord en $(\check{H}^{n+\frac{1}{2}}, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$ ou $(\check{E}^n, \check{E}^n)$ de (2.21) sont traités par le résultat suivant :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} [\theta_x \llbracket w \rrbracket_x, z]_{\partial \mathcal{K} \cap \{y\}} = -\theta_x \llbracket w \rrbracket_x \llbracket z \rrbracket_x. \quad (2.22)$$

Les derniers termes non adressés de (2.21) se réduisent à

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \left(\left[-\frac{1}{2} \left(\left[\mathbf{n}_x \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x \right), \check{E}^n \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} + \left[\left(\frac{\lambda}{Z_x} \left[\check{E}^n \right]_x \right), E^{n+1} \right]_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \right) \\ &= - \sum_{x \in \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \left[\mathbf{n}_x \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right]_x \left\{ \check{E}^n \right\}_x - \sum_{x \in \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda}{Z_x} \left[\check{E}^n \right]_x \left[E^{n+1} \right]_x. \end{aligned}$$

Maintenant, considérons la seconde équation de (2.14). Soit $\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n$ un intervalle donné, et prenons la fonction-test $\psi = H^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{J}} \in V_h^n|_{\mathcal{J}}$. Toujours en évitant de spécifier les restrictions superflues, il vient :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{J}} \left(\mu \frac{H^{n+\frac{1}{2}} - \check{H}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, H^{n+\frac{1}{2}} \right) + l_{\mathcal{J}} \left(E^n, H^{n+\frac{1}{2}} \right) = \\ \left[\left(-\frac{1}{2} [\mathbf{n}_x E^n]_x + \frac{\lambda}{Y_x} [\check{H}^{n-\frac{1}{2}}]_x \right), H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \\ + \left[\left(-[\mathbf{n}_x E^n]_x + Z_x [\check{H}^{n-\frac{1}{2}}]_x \right), H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J} \cap \partial \Omega}. \end{aligned}$$

Avec une intégration par parties et la définition de $\mathcal{E}_{P,\mathcal{J}}^n$, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{\mathcal{E}_{P,\mathcal{J}}^n}{\Delta t} = -\frac{a_{\mathcal{J}}(\varepsilon E^n, E^n) + a_{\mathcal{J}}(\mu H^{n+\frac{1}{2}}, H^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta t} + l_{\mathcal{J}}(H^{n+\frac{1}{2}}, E^n) \\ - \left[(\mathbf{n}_x E^n), H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} + \left[-\frac{1}{2} [\mathbf{n}_x E^n]_x + \frac{\lambda}{Y_x} [\check{H}^{n-\frac{1}{2}}]_x, H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \\ + \left[\left(-[\mathbf{n}_x E^n]_x + Z_x [\check{H}^{n-\frac{1}{2}}]_x \right), H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J} \cap \partial \Omega}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En procédant comme précédemment, nous avons pour les termes de bord en $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \left(- \left[(\mathbf{n}_x E^n), H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} - \left[\frac{1}{2} [\mathbf{n}_x E^n]_x, H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \right. \\ \left. - \left[[\mathbf{n}_x E^n]_x, H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J} \cap \partial \Omega} \right) = \sum_{x \in \cup_{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \frac{1}{2} [H^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_x]_x \{E^n\}_x, \end{aligned}$$

et les termes de bord en $(\check{H}^{n-\frac{1}{2}}, H^{n+\frac{1}{2}})$ de (2.23) se résument à

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \left(\left[\left(\frac{\lambda}{Y_x} [\check{H}^{n-\frac{1}{2}}]_x \right), H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} + \left[Z_x [\check{H}^{n-\frac{1}{2}}]_x, H^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\partial \mathcal{J} \cap \partial \Omega} \right) \\ = - \sum_{x \in \cup_{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda}{Y_x} [\check{H}^{n-\frac{1}{2}}]_x [H^{n+\frac{1}{2}}]_x - \sum_{x \in \partial \Omega} Z_x \check{H}^{n-\frac{1}{2}}(x) H^{n+\frac{1}{2}}(x). \end{aligned}$$

En sommant (2.21) sur tous les $\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}$, et (2.23) sur tous les $\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n$, on en déduit finalement la relation

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_P^{n+1} - \mathcal{E}_P^n}{\Delta t} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \right] \\ - \sum_{x \in \cup_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \left(\frac{\lambda}{Z_x} [\check{E}^n]_x^2 + \frac{\lambda}{Y_x} [\check{H}^{n+\frac{1}{2}}]_x^2 + \frac{\lambda}{Z_x} [\check{E}^n]_x [E^{n+1}]_x \right) \\ - \sum_{x \in \cup_{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda}{Y_x} [\check{H}^{n-\frac{1}{2}}]_x [H^{n+\frac{1}{2}}]_x \\ - \sum_{x \in \partial \Omega} Z_x \left([\check{H}^{n+\frac{1}{2}}]_x^2 + \check{H}^{n-\frac{1}{2}}(x) H^{n+\frac{1}{2}}(x) \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Le résultat (2.17) s'obtient en prenant $\lambda = 0$ dans (2.24).

La relation (2.18) est directement donnée en reportant la définition (2.16) et en appliquant l'identité $-2ab \leq a^2 + b^2$ aux termes de bord de (2.24)

Enfin, l'énergie discrète modifiée au temps $n + 1$ définie par (2.16) n'est composée que de termes vivant dans le même espace (V_h^{n+1}) et est donc vue comme l'énergie discrète modifiée sur un pas d'avancée en temps du schéma sur espace statique (2.6) (ici $V_h \equiv V_h^{n+1}$) et prenant comme donnée d'initialisation les champs $(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) \in (V_h^{n+1})^2$. Par le théorème 2.4, si Δt vérifie la condition CFL (2.9) alors $\tilde{\mathcal{E}}_P^{n+1}$ est définie positive. De même pour $\tilde{\mathcal{E}}_P^n$ sous la condition CFL correspondant à l'espace V_h^n .

Le résultat pour \mathcal{E}_P^n et \mathcal{E}_P^{n+1} se déduit alors en prenant $\lambda = 0$. ■

La proposition 2.7 montre l'influence de l'interpolation sur la stabilité du schéma GD1D évolutif (2.14). La différence principale entre les propositions 2.3 et 2.7 tient dans les termes additionnels $\mathcal{F}_K^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_K^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_K^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}}_K^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ respectivement dans le cas des flux centrés et celui des flux décentrés qui *a priori* ne sont pas négatifs. Ceci peut expliquer le type d'instabilités observées dans la section 2.1.2.

2.2.1.3 Bilan sur les conditions nécessaires sur l'opérateur d'interpolation

La proposition 2.7 montre que le choix naturel fait dans la section 2.1.2 pour Δt , qui était de le prendre comme le minimum de toutes les conditions CFL de chaque V_h^n en statique, ne garantit pas la stabilité du schéma. D'un autre côté, il vient aussi qu'une condition suffisante serait d'assurer

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\widetilde{\mathcal{F}}_K^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}}_K^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \right] \leq 0. \quad (2.25)$$

Il vient alors rapidement qu'un choix convenable pour P^{n+1} devrait être celui qui donne les projections $(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$ des valeurs initiales $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ telles que (2.25) soit vérifiée. Notons qu'il devrait ainsi donner les mêmes propriétés sur le bilan d'énergie pour le schéma adaptatif que celles décrites dans la proposition 2.3 pour maillages statiques. Pour assurer la convergence du schéma, il doit également donner un couple $(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$ proche de $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$.

En résumant, nous devons chercher un opérateur d'interpolation tel que :

$(\mathcal{C}_1) : \text{stabilité}$	$\left \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \right] \right \rightarrow 0,$
$(\mathcal{C}_2) : \text{consistance}$	$\left\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} (E^n - \check{E}^n) \right\ _{\Omega}^2 + \left\ \mu^{\frac{1}{2}} (H^{n+\frac{1}{2}} - \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right\ _{\Omega}^2 \rightarrow 0.$

Ainsi, les conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) traduisent respectivement que l'opérateur d'interpolation P^{n+1} est choisi pour préserver la stabilité et la consistance du schéma.

Remarque 2.9 Pour le système (2.14), quand $V_h^n = V_h^{n+1}$, le choix évident de $P^{n+1} = \text{Id}$ satisfait les conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) . Ainsi la proposition 2.7 induit les résultats de la proposition 2.3. De plus, comme $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) = \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ pour chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, l'équation (2.18) implique la stabilité du schéma telle que montrée dans le théorème 2.4.

2.2.2 Proposition d'un opérateur d'interpolation local

A partir des résultats de la section précédente, nous proposons ici un nouvel opérateur pour effectuer l'interpolation de condition initiale. Cet opérateur étant donné de manière implicite, nous montrons qu'il est bien défini et en proposons l'explicitation selon les espaces d'approximation utilisés.

2.2.2.1 Proposition de l'opérateur d'interpolation local par optimisation

Nous voyons dans la proposition 2.7 que nous avons à gérer une quantité, $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n$, que nous pouvons étudier localement. En effet, sa définition n'est faite que sur des termes dépendant de la cellule de référence \mathcal{K} considérée. Cependant, certains des termes de sauts et moyennes sur la frontière requièrent des valeurs définies sur les cellules voisines de \mathcal{K} . Aussi, la construction de $(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$ satisfaisant (\mathcal{C}_1) doit être menée sur le domaine complet Ω . Il est évident que l'utilisation d'un tel opérateur aura un coût non négligeable en temps et mémoire. C'est pourquoi nous proposons de construire un opérateur d'interpolation local en reconsidérant les termes de bord sur $\partial\mathcal{K}$ et en les traitant comme des contraintes. Ils peuvent être imposés sur la frontière de chaque intervalle \mathcal{K} . Aussi, nous introduisons l'ensemble de fonctions suivant :

$$\mathcal{C}_b^n(\mathcal{K}) = \left\{ (w, z) \in L^2(\mathcal{K}) \times L^2(\mathcal{K}) \text{ traçables sur } \partial\mathcal{K} \mid (w, z)|_{\partial\mathcal{K}} = (E^n, H^{n+\frac{1}{2}})|_{\partial\mathcal{K}} \right\}. \quad (2.26)$$

Nous obtenons naturellement le résultat technique suivant :

Lemme 2.10 Pour tous $(w, z) \in \mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})$, nous avons : $\forall x \in \partial\mathcal{K}$

$$[\mathbf{n}_x w]_x = [\mathbf{n}_x E^n]_x, [w]_x = [E^n]_x, [z]_x = [H^{n+\frac{1}{2}}]_x \text{ et } \llbracket z \rrbracket_x = \left\{ \left\{ v^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right\}_x.$$

Preuve. C'est une conséquence directe de la définition (2.26). ■

Enfin, nous définissons notre opérateur d'interpolation par morceaux localement sur chaque élément de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$.

Définition 2.11 (Opérateur d'interpolation à valeur initiale) Soit Π^{n+1} l'opérateur d'interpolation à valeur initiale pour le schéma GD1D (2.14) :

$$\Pi^{n+1} : \begin{array}{ccc} V_h^n \times V_h^n & \longrightarrow & V_h^{n+1} \times V_h^{n+1} \\ (E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) & \longmapsto & (\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}), \end{array}$$

où $(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$ est défini localement sur chaque élément $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ par

$$(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})|_{\mathcal{K}} := \underset{(w,z) \in (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}) \cap \mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})}{\operatorname{argmin}} [\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z)]^2, \quad (2.27)$$

en notant $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} = \{\mathcal{J} \cap \mathcal{L}, \mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n, \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}\}$, $\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}$ est donné par

$$\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z) := \left[\sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{G} \subset \mathcal{K}} \left(\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(w - E^n)^2 + \mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(z - H^{n+\frac{1}{2}})^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.28)$$

et en utilisant les normes à poids définies pour toute fonction $s \in V_h^{n+\frac{1}{2}}$ par $\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(s)^2 := \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x s \right\|_{\mathcal{G}}^2$ et $\mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(s)^2 := \left\| \mu^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_x s \right\|_{\mathcal{G}}^2$, pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$.

L'existence de Π^{n+1} et la résolution du problème d'optimisation (2.27) sont adressées dans la section suivante.

2.2.2.2 Caractère bien posé du problème d'optimisation

Pour la question de l'existence de Π^{n+1} , nous devons étudier son écriture sur chaque cellule de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$. De même, sur chaque cellule \mathcal{K} , nous construisons le projeté comme minimum sur le sous-espace $(V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}) \cap \mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})$. Aussi, avant de montrer l'existence et l'unicité, nous devons nous assurer que l'intersection est non-vide.

Dans la définition (2.26), en notant $x_1^{\mathcal{K}}$ et $x_r^{\mathcal{K}}$ les deux extrémités d'un intervalle donné $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, nous remarquons que $\mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})$ revient à imposer deux valeurs données sur le couple (w, z) en $x_1^{\mathcal{K}}$ et $x_r^{\mathcal{K}}$. Ainsi, de façon générale, en ne prenant pas ces valeurs égales, nous voyons que $(V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}) \cap \mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})$ doit contenir au moins deux degrés de liberté par inconnue, comme le montre la figure 2.5. Donc, selon l'ordre polynomial minimal $r_{\mathcal{K}}$ et le nombre de subdivisions $k_{\mathcal{K}}$, nous voyons que nous avons les restrictions suivantes :

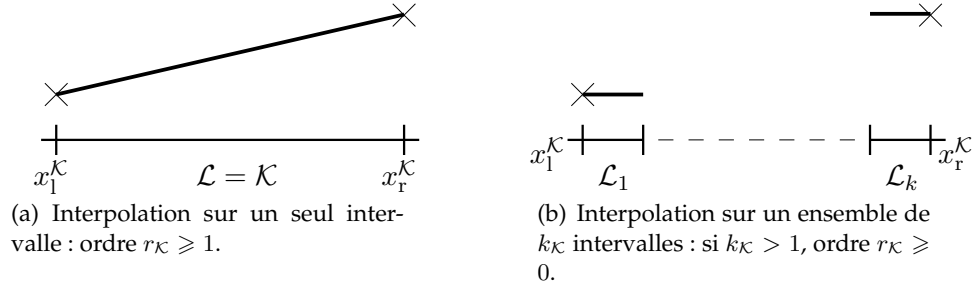


FIGURE 2.5: Conditions minimales sur l'approximation polynomiale.

- si $k_{\mathcal{K}} = 1$ alors nous devons avoir au moins $r_{\mathcal{K}} \geq 1$,
- si $r_{\mathcal{K}} = 0$ alors nous devons avoir $k_{\mathcal{K}} \geq 2$,
- pour $k_{\mathcal{K}} \geq 1$ et $r_{\mathcal{K}} \geq 1$, aucune condition particulière n'est requise.

Nous remarquerons que ces considérations sur $k_{\mathcal{K}}$ et $r_{\mathcal{K}}$ n'ont pas d'intérêt sur maillage statique, ou localement statique (ie : quand $V_h^n|_{\mathcal{K}} = V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$), car l'étape d'interpolation y est absente. Par extension, il n'y a *a priori* aucune raison d'interpoler la valeur initiale $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ quand $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$. Ce dernier point sera confirmé dans la suite par la proposition 2.13.

Pour résumer, nous avons l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}) \quad \text{Pour tout } \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \text{ tel que } V_h^n|_{\mathcal{K}} \not\subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}, \\ \text{soit } k_{\mathcal{K}} = 1 \text{ et } r_{\mathcal{K}} \geq 1, \text{ ou } k_{\mathcal{K}} \geq 2 \text{ et } r_{\mathcal{K}} \geq 0.$$

Maintenant, nous pouvons étudier le caractère bien posé de la définition 2.11.

Proposition 2.12 *Sous l'hypothèse (\mathcal{H}) , l'opérateur Π^{n+1} est bien défini.*

Preuve. Afin de prouver ce résultat, nous devons montrer que la solution du problème local de minimisation (2.27) existe et est unique.

Tout d'abord, notons que la fonctionnelle

$$(w, z) \in V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \mapsto \left[\sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{G} \subset \mathcal{K}} (\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(w)^2 + \mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(z)^2) \right]^{\frac{1}{2}},$$

est, comme combinaison linéaire positive de normes et de semi-normes, équivalente à une norme sur $H^1 \left(\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{K}} \right) \times H^1 \left(\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{K}} \right)$. En conséquence, la relation (2.27) revient à mi-

nimiser sur un sous-espace de $H^1 \left(\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{\mathcal{K}} \right) \times H^1 \left(\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{\mathcal{K}} \right)$ par rapport à une norme de cet espace. En particulier, ce problème est connu pour avoir une solution unique (la projection orthogonale) quand l'espace est non vide, fermé et convexe.

Nous allons donc prouver que l'espace $\mathcal{S}_{\mathcal{K}} := (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}) \cap \mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})$ est non-vide, convexe et fermé. Le caractère non-vide de l'intersection est garanti par l'hypothèse (\mathcal{H}) . En effet, selon (\mathcal{H}) soit $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ et donc $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ appartient à $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$, soit $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ présente au moins deux degrés de liberté par inconnue, ce qui permet de construire une fonction sur $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ satisfaisant les restrictions de $\mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})$.

Soient (w_1, z_1) et (w_2, z_2) deux couples d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$, et soit $\theta \in [0, 1]$. Alors le couple $(\theta w_1 + (1 - \theta)w_2, \theta z_1 + (1 - \theta)z_2)$ vérifie :

$$\forall y \in \{x_1^{\mathcal{K}}, x_r^{\mathcal{K}}\}, \begin{cases} (\theta w_1 + (1 - \theta)w_2)(y) = \theta E^n(y) + (1 - \theta)E^n(y) = E^n(y), \\ (\theta z_1 + (1 - \theta)z_2)(y) = \theta H^{n+\frac{1}{2}}(y) + (1 - \theta)H^{n+\frac{1}{2}}(y) = H^{n+\frac{1}{2}}(y). \end{cases}$$

Donc $(\theta w_1 + (1 - \theta)w_2, \theta z_1 + (1 - \theta)z_2)$ appartient à $\mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})$. De plus, $(\theta w_1 + (1 - \theta)w_2, \theta z_1 + (1 - \theta)z_2)$ appartient à $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ par une telle combinaison linéaire. Ainsi $(\theta w_1 + (1 - \theta)w_2, \theta z_1 + (1 - \theta)z_2) \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ et donc $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ est convexe.

Maintenant, nous introduisons l'opérateur linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{K}} : \quad & V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathbb{R}^4, \\ & (w, z) \longmapsto (w(x_1^{\mathcal{K}}), w(x_r^{\mathcal{K}}), z(x_1^{\mathcal{K}}), z(x_r^{\mathcal{K}})). \end{aligned}$$

Soit $B_R(y)$ la boule centrée en $y \in \{x_1^{\mathcal{K}}, x_r^{\mathcal{K}}\}$ de rayon $R > 0$ telle que $\exists \mathcal{G}_x \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{K} \cap B_R(y) \subset \mathcal{G}_x$. Par surjection compacte de $H^1(B_R(y))$ dans $L^2(\partial B_R(y))$, il vient :

$$|(w(y), z(y))| \preccurlyeq \|(w, z)\|_{H^1(B_R(y))^2} \preccurlyeq \|(w, z)\|_{H^1(\mathcal{T}_h^{n+1}|_{\mathcal{K}})^2}.$$

Comme $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \subset H^1 \left(\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{\mathcal{K}} \right)$, $\gamma_{\mathcal{K}}$ est donc continue sur $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$. Ainsi, $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ se voit comme l'antécédent de $\gamma_{\mathcal{K}}$ d'un espace fermé

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \gamma_{\mathcal{K}}^{-1} \left(\left\{ \left(E^n(x_1^{\mathcal{K}}), E^n(x_r^{\mathcal{K}}), H^{n+\frac{1}{2}}(x_1^{\mathcal{K}}), H^{n+\frac{1}{2}}(x_r^{\mathcal{K}}) \right) \right\} \right).$$

Finalement, $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ est fermé, ce qui conclut la preuve. ■

2.2.2.3 Explicitation de l'opérateur

Selon la définition 2.11, la construction de Π^{n+1} peut être menée pour chaque cellule de référence indépendamment. Ainsi, nous concluons cette section en donnant deux résultats décrivant l'expression explicite de Π^{n+1} pour les deux cas traités dans la pratique : quand $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ (proposition 2.13) et pour le cas général (proposition 2.14).

Projection dans le cas du raffinement seul ($V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$)

Proposition 2.13 *Sur toute cellule de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ avec $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$, la restriction sur \mathcal{K} de l'opérateur d'interpolation à valeur initiale Π^{n+1} est $\text{Id}_{\mathcal{K}}$.*

Preuve. Soit donc $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ une cellule de référence donnée telle que $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$. Il suit donc que $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})|_{\mathcal{K}}$ appartient à $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ et appartient à $\mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})$. Par (2.27), il vient alors

$$\left[\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1} \left(E^n|_{\mathcal{K}}, H^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{K}} \right) \right]^2 = 0 \leq \underset{(w,z) \in (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}) \cap \mathcal{C}_b^n(\mathcal{K})}{\text{argmin}} \left[\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z) \right]^2.$$

Par l'unicité de Π^{n+1} (proposition 2.12) on a donc $\Pi^{n+1} \left(E^n, H^{n+\frac{1}{2}} \right)|_{\mathcal{K}} = \left(E^n, H^{n+\frac{1}{2}} \right)|_{\mathcal{K}}$. ■

Projection dans le cas du maillage adapté ($V_h^n|_{\mathcal{K}} \not\subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$)

Proposition 2.14 *Nous supposons (\mathcal{H}) vérifiée. Donc, sur chaque cellule de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ avec $V_h^n|_{\mathcal{K}} \not\subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$, la restriction sur \mathcal{K} de l'opérateur d'interpolation Π^{n+1} est*

$$\Pi^{n+1} \left(E^n, H^{n+\frac{1}{2}} \right)|_{\mathcal{K}} = \left(\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{K}}} U_{\mathcal{K},i}^n \phi_i^{\mathcal{K}}, \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{K}}} W_{\mathcal{K},i}^{n+\frac{1}{2}} \phi_i^{\mathcal{K}} \right),$$

où les coordonnées $(U_{\mathcal{K},i}^n)_i$ et $(W_{\mathcal{K},i}^{n+\frac{1}{2}})_i$, écrites dans la base $\{\phi_i^{\mathcal{K}}, i = 1, \dots, N_{\mathcal{K}}\}$ de $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$, sont calculées par

$$\begin{pmatrix} (U_{\mathcal{K},i}^n)_i \\ (W_{\mathcal{K},i}^{n+\frac{1}{2}})_i \end{pmatrix} := P - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}^T \left[\mathbf{B} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}^T \right]^{-1} (\mathbf{B}P - S), \quad (2.29a)$$

$$P := (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T Y, \quad (2.29b)$$

avec les matrices et vecteurs définis comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\varepsilon} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{R}_{\mu} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\mu} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{R}_{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{\delta} = (a_{\mathcal{K}}(\delta \phi_i^{\mathcal{K}}, \phi_j^{\mathcal{K}}))_{1 \leq i, j \leq N_{\mathcal{K}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{\delta} = (a_{\mathcal{K}}(\delta^{-1} \partial_x \phi_i^{\mathcal{K}}, \partial_x \phi_j^{\mathcal{K}}))_{1 \leq i, j \leq N_{\mathcal{K}}} \quad \text{pour } \delta \in \{\varepsilon, \mu\},$$

$$S = \begin{pmatrix} E^n(x_1^{\mathcal{K}}) \\ E^n(x_r^{\mathcal{K}}) \\ H^{n+\frac{1}{2}}(x_1^{\mathcal{K}}) \\ H^{n+\frac{1}{2}}(x_r^{\mathcal{K}}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \phi_1^{\mathcal{K}}(x_1^{\mathcal{K}}) & \dots & \phi_{N_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}(x_1^{\mathcal{K}}) & 0 & \dots & 0 \\ \phi_1^{\mathcal{K}}(x_r^{\mathcal{K}}) & \dots & \phi_{N_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}(x_r^{\mathcal{K}}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \phi_1^{\mathcal{K}}(x_1^{\mathcal{K}}) & \dots & \phi_{N_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}(x_1^{\mathcal{K}}) \\ 0 & \dots & 0 & \phi_1^{\mathcal{K}}(x_r^{\mathcal{K}}) & \dots & \phi_{N_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}(x_r^{\mathcal{K}}) \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} a_K(\varepsilon E^n, \phi_1^K) + \frac{\Delta t^2}{4} a_K(\mu^{-1} \partial_x E^n, \partial_x \phi_1^K) \\ \vdots \\ a_K(\varepsilon E^n, \phi_{N_K}^K) + \frac{\Delta t^2}{4} a_K(\mu^{-1} \partial_x E^n, \partial_x \phi_{N_K}^K) \\ a_K(\mu H^{n+\frac{1}{2}}, \phi_1^K) + \frac{\Delta t^2}{4} a_K(\varepsilon^{-1} \partial_x H^{n+\frac{1}{2}}, \partial_x \phi_1^K) \\ \vdots \\ a_K(\mu H^{n+\frac{1}{2}}, \phi_{N_K}^K) + \frac{\Delta t^2}{4} a_K(\varepsilon^{-1} \partial_x H^{n+\frac{1}{2}}, \partial_x \phi_{N_K}^K) \end{pmatrix}.$$

Nous commençons la démonstration par le lemme suivant.

Lemme 2.15 *La matrice \mathbf{A} de la proposition 2.14 est symétrique définie positive.*

Preuve. Il suffit de remarquer que \mathbf{A} est la matrice de la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \vartheta_K : (V_h^{n+1}|_K \times V_h^{n+1}|_K)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((w_1, z_1), (w_2, z_2)) &\longmapsto a_K(\varepsilon w_1, w_2) + \frac{\Delta t^2}{4} a_K(\mu^{-1} \partial_x w_1, \partial_x w_2) \\ &\quad + a_K(\mu z_1, z_2) + \frac{\Delta t^2}{4} a_K(\varepsilon^{-1} \partial_x z_1, \partial_x z_2). \end{aligned}$$

Or, ϑ_K définit un produit scalaire sur $V_h^{n+1}|_K \times V_h^{n+1}|_K$, comparable au produit scalaire usuel sur $H^1 \times H^1$, \mathbf{A} est donc symétrique définie positive. ■

Preuve de la proposition 2.14. Les formules (2.29a) et (2.29b) sont déduites de l'étude du lagrangien du problème d'optimisation (2.27). En effet, il peut être écrit, grâce aux matrices et vecteurs définis précédemment, comme le minimiseur de la forme :

$$\mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \lambda \right) := \frac{1}{2} \left\| Y - \mathbf{A} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right\|^2 + \lambda^T \left(\mathbf{B} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} - S \right). \quad (2.30)$$

avec λ , la matrice de taille 4×1 des multiplicateurs de Lagrange qui est à déterminer.

En utilisant les conditions du premier ordre de Karush-Kuhn-Tucker [62], la solution $\left(\begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix}, \lambda^* \right)$ du problème (2.30) vérifie :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \left(\begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix}, \lambda^* \right) = \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A} \begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix} - Y \right) + \mathbf{B}^T \lambda^* = 0, \quad (2.31a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \left(\begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix}, \lambda^* \right) = \mathbf{B} \begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix} - S = 0. \quad (2.31b)$$

Puis, en utilisant l'inversibilité de \mathbf{A} induite par le lemme 2.15, l'équation (2.31a) devient

$$\begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{A}^T Y - \mathbf{B}^T \lambda^*] = P - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}^T \lambda^*, \quad (2.32)$$

grâce à l'équation (2.29b). En injectant cette égalité dans l'équation (2.31b), il vient

$$\mathbf{B}P - \mathbf{B}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}^* - S = 0.$$

Selon l'hypothèse (\mathcal{H}) , la dimension de $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ est supérieure à 4. Plus précisément, l'espace $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ contient au minimum une fonction de base du premier degré ou deux fonctions constantes par morceaux. Ainsi, le rang de la matrice \mathbf{B} est exactement de 4. Il vient donc que la matrice $\mathbf{B}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}^T$ est inversible et que :

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \left[\mathbf{B}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}^T \right]^{-1} (\mathbf{B}P - S). \quad (2.33)$$

En écrivant l'équation (2.33) dans l'égalité (2.32), nous obtenons le résultat voulu. ■

En conclusion, nous avons une définition locale de l'interpolation Π^{n+1} , et une formule explicite directe de la minimisation sous contraintes, au lieu d'un algorithme de recherche de minimisation classique par itération.

2.2.3 Étude de l'opérateur d'interpolation 1D

Nous effectuons ici l'étude de l'opérateur d'interpolation précédemment proposé. Cette étude se fait selon deux points :

- dans un premier temps nous analysons la pertinence de cet opérateur, c'est-à-dire s'il vérifie les conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) introduites dans la section 2.2.1.3,
- en second temps, nous proposons un résultat d'estimation *a posteriori* de l'erreur introduite par cet opérateur.

2.2.3.1 Pertinence de l'opérateur d'interpolation 1D

Avec la définition 2.11, nous avons proposé un opérateur d'interpolation Π^{n+1} . Il reste toutefois à montrer que ce choix est judicieux au sens des conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) . Pour ce faire, nous étudions Π^{n+1} dans le cas où la minimisation dans (2.27) converge. Pour mesurer cette convergence, nous considérons le résidu donné par la fonction-coût $\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}$ au point optimal $\Pi^{n+1}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$. Il s'ensuit :

Théorème 2.16 (Pertinence de l'opérateur d'interpolation) *Nous supposons l'hypothèse (\mathcal{H}) vérifiée. Soient $(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) := \Pi^{n+1}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1} := \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$ respectivement le résultat de l'interpolation par Π^{n+1} et le résidu de la construction de l'opérateur d'interpolation Π^{n+1} sur la cellule de référence \mathcal{K} . Alors, lorsque $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1}$ tend vers 0 sur toute cellule $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, les conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) sont satisfaites.*

Remarque 2.17 Le terme de résidu $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1} = \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1} \left(\tilde{E}^n, \tilde{H}^{n+\frac{1}{2}} \right)$ mesure la différence entre $(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ et $(\tilde{E}^n, \tilde{H}^{n+\frac{1}{2}})$ dans la norme définie ci-après sur $H^1 \left(\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{\mathcal{K}} \right)$:

$$(w, z) \longmapsto \sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{G} \subset \mathcal{K}} (\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(w)^2 + \mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(z)^2).$$

Cette norme est localement équivalente à la norme du graphe (pour l'opérateur différentiel considéré) en prenant sa restriction sur chaque $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$.

Nous aurons besoin du lemme suivant avant de démontrer le théorème.

Lemme 2.18 Soit $\mathcal{G} := [x_l^{\mathcal{G}}, x_r^{\mathcal{G}}]$ un intervalle donné et $s \in H^1(\mathcal{G})$. On note la longueur de l'intervalle $h_{\mathcal{G}} = x_r^{\mathcal{G}} - x_l^{\mathcal{G}}$. Si Δt vérifie une condition $\frac{\Delta t}{h_{\mathcal{G}}} c_{\max} < c_{\text{CFL}}$, où c_{CFL} est une constante strictement positive indépendante de $h_{\mathcal{G}}$, alors il existe $\alpha > 1$ indépendant de $h_{\mathcal{G}}$ et de l'ordre local d'approximation $r_{\mathcal{G}}$ tel que :

$$\frac{\Delta t}{2Z_{x_l^{\mathcal{G}}}} |s(x_l^{\mathcal{G}})|^2 + \frac{\Delta t}{2Z_{x_r^{\mathcal{G}}}} |s(x_r^{\mathcal{G}})|^2 \leq \sqrt{\frac{Z_{\max}}{Z_{\min}}} \alpha (1 + C(h_{\mathcal{G}})) (\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(s))^2, \quad (2.34a)$$

$$\frac{\Delta t}{2Y_{x_l^{\mathcal{G}}}} |s(x_l^{\mathcal{G}})|^2 + \frac{\Delta t}{2Y_{x_r^{\mathcal{G}}}} |s(x_r^{\mathcal{G}})|^2 \leq \sqrt{\frac{Y_{\max}}{Y_{\min}}} \alpha (1 + C(h_{\mathcal{G}})) (\mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(s))^2, \quad (2.34b)$$

avec $C(h_{\mathcal{G}}) \xrightarrow{h_{\mathcal{G}} \rightarrow 0^+} 0$.

Preuve. Soit $\varphi(x) = 2 \frac{x - x_m^{\mathcal{G}}}{h_{\mathcal{G}}}$, avec $x_m^{\mathcal{G}} = \frac{x_l^{\mathcal{G}} + x_r^{\mathcal{G}}}{2}$. Selon la définition de l'admittance moyenne Z_x , nous pouvons établir la minoration suivante, pour tout $x \in \mathcal{G}$:

$$Z_x \geq Z_{\min} \geq \frac{Z_{\min}}{Z_{\max}} \lim_{x \rightarrow y, x \in \mathcal{G}} \sqrt{\frac{\mu(x)}{\varepsilon(x)}},$$

où $Z_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\varepsilon_{\min}}}$ et $Z_{\min} = \sqrt{\frac{\mu_{\min}}{\varepsilon_{\max}}}$. Avec $\varphi(x_l^{\mathcal{G}}) \mathbf{n}_{x_l^{\mathcal{G}}} = \varphi(x_r^{\mathcal{G}}) \mathbf{n}_{x_r^{\mathcal{G}}} = 1$, il vient alors :

$$\frac{Z_{\min}}{Z_{\max}} \left| \frac{\Delta t}{2} [(Z_x^{-1} s), s]_{\partial \mathcal{G}} \right| \leq \left| \left[\frac{\Delta t}{2} (\mu^{-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_x s), \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi s \right]_{\partial \mathcal{G}} \right|.$$

De plus, avec une intégration par parties, on a :

$$\left| \left[\frac{\Delta t}{2} (\mu^{-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_x s), \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi s \right]_{\partial \mathcal{G}} \right| = \left| l_{\mathcal{G}} \left(\frac{\Delta t}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} s, \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi s \right) + l_{\mathcal{G}} \left(\frac{\Delta t}{2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi s, \mu^{-\frac{1}{2}} s \right) \right|.$$

Par les inégalités classiques, le premier terme du membre de droite se majore par :

$$\begin{aligned} \left| l_{\mathcal{G}} \left(\frac{\Delta t}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} s, \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi s \right) \right| &\leq \frac{\Delta t^2}{8} \left\| \partial_x (\mu^{-\frac{1}{2}} s) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{\infty}^2 \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 \\ &\leq \frac{1}{16} \left\| \frac{\partial_x \mu}{\mu} \frac{\Delta t}{(\varepsilon \mu)^{\frac{1}{2}}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c_{\text{CFL}}^2}{8} h_{\mathcal{G}}^2 \left\| \frac{\partial_x \mu}{\mu} \right\|_{\infty, \mathcal{G}}^2 \right) \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x s \right\|_{\mathcal{G}}^2. \end{aligned}$$

De même, le second terme se borne par :

$$\begin{aligned}
\left| l_{\mathcal{G}} \left(\frac{\Delta t}{2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi s, \mu^{-\frac{1}{2}} s \right) \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{(\varepsilon \mu)^{\frac{1}{2}}} \partial_x (\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi s) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 \right) \\
&\leq \frac{c_{\text{CFL}}^2}{16} h_{\mathcal{G}}^2 \left\| \frac{\partial_x \varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{\infty, \mathcal{G}}^2 \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \left\| \frac{1}{(\varepsilon \mu)^{\frac{1}{2}}} \partial_x (\varphi) \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + 2c_{\text{CFL}}^2 + \frac{c_{\text{CFL}}^2}{16} h_{\mathcal{G}}^2 \left\| \frac{\partial_x \varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{\infty, \mathcal{G}}^2 \right) \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x s \right\|_{\mathcal{G}}^2.
\end{aligned}$$

En réassemblant ces deux résultats, on obtient l'inégalité (2.34a). L'inégalité (2.34b) s'obtient de façon similaire, en prenant le couple $(w, z) = \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} s, \mu^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{2} \varphi s \right)$. ■

Preuve du théorème 2.16. Nous montrons dans un premier temps que (\mathcal{C}_2) est vérifiée (à la limite). Par l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \forall (w, z) \in (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}) \cap \mathcal{C}_b(\mathcal{K}), \\
\left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (w - E^n) \right\|_{\mathcal{K}}^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} \left(z - H^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \leq \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z)^2,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

le résultat est obtenu en choisissant $(w, z) = \Pi^{n+1}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})|_{\mathcal{K}}$.

Maintenant, nous vérifions (\mathcal{C}_1) . Soit $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ une cellule de référence donnée, et soit $(w, z) \in (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}) \cap \mathcal{C}_b(\mathcal{K})$. En utilisant la formule (2.22), le lemme 2.10 et la définition de $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$, il vient

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z) - \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) = \\
&\sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{G} \subset \mathcal{K}} \frac{a_{\mathcal{G}}(\varepsilon w, w) + a_{\mathcal{G}}(\mu z, z) - a_{\mathcal{G}}(\varepsilon E^n, E^n) - a_{\mathcal{G}}(\mu H^{n+\frac{1}{2}}, H^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta t} \\
&- \sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{G} \subset \mathcal{K}} \left(\frac{l_{\mathcal{G}}(w, z) - l_{\mathcal{G}}(z, w)}{2} - \frac{l_{\mathcal{G}}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) - l_{\mathcal{G}}(H^{n+\frac{1}{2}}, E^n)}{2} \right) \\
&- \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \mathcal{L} \subset \mathcal{K}} \frac{1}{2} [(\mathbf{n}_x z), w]_{\partial \mathcal{L} \setminus \mathcal{K}} + \sum_{\substack{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n \\ \mathcal{J} \subset \mathcal{K}}} \frac{1}{2} [(\mathbf{n}_x H^{n+\frac{1}{2}}), E^n]_{\partial \mathcal{J} \setminus \mathcal{K}} \\
&- \sum_{x \in \cup_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \mathcal{L} \subset \mathcal{K}} \partial \mathcal{L} \setminus \partial \mathcal{K}} \left(\frac{\lambda \llbracket w \rrbracket_x^2}{2Z_x} + \frac{\lambda \llbracket z \rrbracket_x^2}{2Y_x} + \llbracket \mathbf{n}_x z \rrbracket_x \llbracket w \rrbracket_x \right) \\
&+ \sum_{x \in \cup_{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n, \mathcal{J} \subset \mathcal{K}} \partial \mathcal{J} \setminus \partial \mathcal{K}} \left(\frac{\lambda \llbracket E^n \rrbracket_x^2}{2Z_x} + \frac{\lambda \llbracket H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x^2}{2Y_x} + \llbracket \mathbf{n}_x H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x \llbracket E^n \rrbracket_x \right).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Il s'agit maintenant de borner les termes de (2.36) en considérant des regroupements. En utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)^2 + 2b(a - b)$, il vient pour chaque $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} & |a_{\mathcal{G}}(\varepsilon w, w) - a_{\mathcal{G}}(\varepsilon E^n, E^n)| + |a_{\mathcal{G}}(\mu z, z) - a_{\mathcal{G}}(\mu H^{n+\frac{1}{2}}, H^{n+\frac{1}{2}})| \\ & \leq \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}}(w - E^n) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + 2 \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} E^n \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}}(w - E^n) \right\|_{\mathcal{G}} \\ & \quad + \left\| \mu^{\frac{1}{2}}(z - H^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + 2 \left\| \mu^{\frac{1}{2}} H^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \mu^{\frac{1}{2}}(z - H^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nous considérons maintenant les termes en $l_{\mathcal{G}}$ dans (2.36) via une première décomposition

$$l_{\mathcal{G}}(w, z) - l_{\mathcal{G}}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) = l_{\mathcal{G}}(E^n, z - H^{n+\frac{1}{2}}) + l_{\mathcal{G}}(w - E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) + l_{\mathcal{G}}(w - E^n, z - H^{n+\frac{1}{2}}).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'identité $ab \leq \frac{c}{2}a^2 + \frac{1}{2c}b^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & |l_{\mathcal{G}}(w, z) - l_{\mathcal{G}}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})| \\ & \leq \frac{\Delta t}{4\mu_{\min}} \|\partial_x(w - E^n)\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\mu_{\min}}{\Delta t} \|z - H^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{G}}^2 \\ & \quad + \|\partial_x E^n\|_{\mathcal{G}} \|z - H^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{G}} + \|\partial_x(w - E^n)\|_{\mathcal{G}} \|H^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{G}} \\ & \leq \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}} \left(\frac{\Delta t}{4} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x(w - E^n) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{\Delta t} \left\| \mu^{\frac{1}{2}}(z - H^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x E^n \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \mu^{\frac{1}{2}}(z - H^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}} + \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x(w - E^n) \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \mu^{\frac{1}{2}} H^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{G}} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

De même, pour le terme $|l_{\mathcal{G}}(z, w) - l_{\mathcal{G}}(H^{n+\frac{1}{2}}, E^n)|$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & |l_{\mathcal{G}}(z, w) - l_{\mathcal{G}}(H^{n+\frac{1}{2}}, E^n)| \\ & \leq \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\min}}} \left(\frac{\Delta t}{4} \left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_x(z - H^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{\Delta t} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}}(w - E^n) \right\|_{\mathcal{G}}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_x H^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}}(w - E^n) \right\|_{\mathcal{G}} + \left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_x(z - H^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} E^n \right\|_{\mathcal{G}} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Enfin, nous traitons les termes de bords en (2.36). Tous ces termes peuvent être réécrits sous une seule somme en utilisant la définition de $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$. En effet, soit $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$ un intervalle donné et soient $\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}$ et $\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n$ les deux intervalles tels que $\mathcal{G} = \mathcal{L} \cap \mathcal{J}$. Alors, $x \in \partial\mathcal{G}$ vérifie

- soit $x \in \partial\mathcal{L}$ et $x \in \partial\mathcal{J}$, alors les sauts et moyennes des inconnues sont déjà pris en compte dans (2.36),
- soit $x \in \partial\mathcal{L}$ et $x \notin \partial\mathcal{J}$, alors, quand E^n et $H^{n+\frac{1}{2}}$ appartiennent à un sous-espace de $H^1(\mathcal{J})$ avec $x \in \mathcal{J} \setminus \partial\mathcal{J}$ il vient $\llbracket E^n \rrbracket_x = \llbracket H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x = 0$,
- soit enfin $x \notin \partial\mathcal{L}$ et $x \in \partial\mathcal{J}$ qui implique que $\llbracket w \rrbracket_x = \llbracket z \rrbracket_x = 0$.

Ainsi, les termes de bord dans (2.36) se réécrivent comme

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in \cup \\ g \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, g \subset \mathcal{K}}} \partial \mathcal{G} \setminus \partial \mathcal{K} & \left(\lambda \frac{\llbracket w \rrbracket_x^2 - \llbracket E^n \rrbracket_x^2}{2Z_x} + \lambda \frac{\llbracket z \rrbracket_x^2 - \llbracket H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x^2}{2Y_x} \right. \\ & \left. + \llbracket \mathbf{n}_x z \rrbracket_x \llbracket w \rrbracket_x - \llbracket \mathbf{n}_x H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x \llbracket E^n \rrbracket_x \right) \\ & =: \sum_{\substack{x \in \cup \\ g \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, g \subset \mathcal{K}}} \partial \mathcal{G} \setminus \partial \mathcal{K} \mathcal{B}_x. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Maintenant, prenons $x \in \partial \mathcal{G} \setminus \partial \mathcal{K}$. Avec les relations $Z_x = 1/Y_x$ et $a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2b(a-b)$, le terme \mathcal{B}_x vérifie

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x & \leq \lambda \frac{\llbracket w - E^n \rrbracket_x^2 + 2 \llbracket \llbracket E^n \rrbracket_x \llbracket w - E^n \rrbracket_x \rrbracket}{2Z_x} + \lambda \frac{\llbracket z - H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x^2 + 2 \llbracket \llbracket H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x \llbracket z - H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x \rrbracket}{2Y_x} \\ & \quad + \left| \llbracket \mathbf{n}_x H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_x \llbracket w - E^n \rrbracket_x \right| + \left| \llbracket \mathbf{n}_x (z - H^{n+\frac{1}{2}}) \rrbracket_x \right| (\llbracket \llbracket w - E^n \rrbracket_x \rrbracket + \llbracket \llbracket E^n \rrbracket_x \rrbracket). \end{aligned}$$

En appliquant (2.34a) et (2.34b), cette dernière quantité est majorée terme à terme avec :

$$\begin{aligned} \Delta t \frac{\llbracket f \rrbracket_x^2}{2Z_x} & \leq 2 \frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} \alpha(1 + C(h_{\mathcal{K}})) \left(\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(f)^2 + \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}'}(f)^2 \right), \\ \Delta t \frac{\llbracket f \rrbracket_x \llbracket g \rrbracket_x}{2Z_x} & \leq \frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} \alpha(1 + C(h_{\mathcal{K}})) \left(\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(f) \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(g) + \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(f) \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}'}(g) \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}'}(f) \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(g) + \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}'}(f) \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}'}(g) \right), \\ \Delta t \llbracket f \rrbracket_x \llbracket g \rrbracket_x & \leq \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\min}}} \alpha(1 + C(h_{\mathcal{K}})) \left(\mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(f) \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(g) + \mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(f) \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}'}(g) \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}'}(f) \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(g) + \mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}'}(f) \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}'}(g) \right), \end{aligned}$$

avec $C(h_{\mathcal{K}}) \xrightarrow{h_{\mathcal{K}} \rightarrow 0^+} 0$. Des majorations similaires s'obtiennent pour $\Delta t \frac{\llbracket f \rrbracket_x^2}{2Y_x}$ et $\Delta t \frac{\llbracket f \rrbracket_x \llbracket g \rrbracket_x}{2Y_x}$ en remplaçant les « Z » et « $\mathcal{N}_{\varepsilon}$ » respectivement par des « Y » et « \mathcal{N}_{μ} ». On définit la constante M à la limite par :

$$M := \frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} \alpha(1 + C(h_{\mathcal{K}})) = \frac{Y_{\max}}{Y_{\min}} \alpha(1 + C(h_{\mathcal{K}})) = \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\min}}} \alpha(1 + C(h_{\mathcal{K}})),$$

et l'équation (2.40) devient

$$\sum_{\substack{x \in \cup \\ g \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, g \subset \mathcal{K}}} \partial \mathcal{G} \setminus \partial \mathcal{K} \mathcal{B}_x \leq (2\lambda + 1)M \left[2\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z)^2 + \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(0, 0)\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z) \right]. \quad (2.41)$$

En combinant les résultats (2.37), (2.38), (2.39) et (2.41), il vient finalement

$$\begin{aligned} \Delta t \left| \widetilde{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^{n+1}}(w, z) - \widetilde{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \right| \\ \leq 4(1 + \lambda)M \left(\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z)^2 + \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(0, 0)\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(w, z) \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Afin de prouver (\mathcal{C}_1) , il suffit alors de prendre $(w, z) = \Pi^{n+1}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \Big|_{\mathcal{K}}$. ■

2.2.3.2 Contrôle *a posteriori* de l'erreur d'interpolation 1D

Nous avons vu que le problème de minimisation (2.27) donne un résidu qui peut être utilisé pour montrer la pertinence de Π^{n+1} comme opérateur d'interpolation à valeur initiale. En outre, de la démonstration du théorème 2.16, nous pouvons extraire des informations supplémentaires fournissant un contrôle *a posteriori* local et optimal sur le respect des conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .

Pour ce faire, soit $V_h^{n+\frac{1}{2}}$ un espace défini par $V_h^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{G}} := \max(V_h^n|_{\mathcal{G}}, V_h^{n+1}|_{\mathcal{G}})$, pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$, où le maximum doit être pris au sens de l'inclusion. Ainsi :

Corollaire 2.19 (Estimation *a posteriori* sur Π^{n+1}) Nous supposons (\mathcal{H}) vérifiée, et notons $(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) := \Pi^{n+1}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1} := \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}})$ le résidu de la construction de l'opérateur d'interpolation Π^{n+1} sur la cellule de référence \mathcal{K} . Alors, pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, il vient

$$\left| \widetilde{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^{n+1}}(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}}) \right| \leq \frac{4(1+\lambda)M}{\Delta t} [(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1})^2 + \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(0,0)\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1}], \quad (2.43)$$

où

$$M := \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\min}}} \alpha (1 + C(h_{\mathcal{K}})),$$

avec $C(h_{\mathcal{G}}) \xrightarrow{h_{\mathcal{G}} \rightarrow 0^+} 0$, et $\alpha \geq 1$ une constante. De plus, si Δt vérifie la condition CFL (2.9) sur l'espace $V_h^{n+\frac{1}{2}}$, alors

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1})^2 \geq \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\check{E}^n - E^n) \right\|_{\mathcal{K}}^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\check{H}^{n+\frac{1}{2}} - H^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \geq \frac{1}{2} (\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1})^2. \quad (2.44)$$

Preuve. L'inégalité (2.43) se déduit de (2.42) en prenant $(w, z) = \Pi^{n+1}(E^n, H^{n+\frac{1}{2}})|_{\mathcal{K}}$. De même, la partie majoration de $\left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\check{E}^n - E^n) \right\|_{\mathcal{K}}^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\check{H}^{n+\frac{1}{2}} - H^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{K}}^2$ dans l'inégalité (2.44) vient directement de (2.35). Il reste à prouver la partie minoration dans (2.44). Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$ une cellule donnée. Alors, pour tout $s \in V_h^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{G}}$ nous avons en reprenant les notations du théorème de stabilité 2.4

$$\left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x s \right\|_{\mathcal{G}}^2 \leq \frac{\lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}}_{r_{\mathcal{G}}} \widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} \right)}{\mu_{\min} \varepsilon_{\max}} \left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} S_{\mathcal{G}} \right\|_{\mathcal{G}}^2 \leq \frac{c_{\max}^2 \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}}_{r_{\mathcal{G}}} \widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} \right)}{h_{\mathcal{G}}^2} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2.$$

Ainsi, il vient

$$\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(s)^2 \leq \left(1 + \frac{\Delta t^2 c_{\max}^2 \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}}_{r_{\mathcal{G}}} \widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} \right)}{4h_{\mathcal{G}}^2} \right) \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2.$$

Enfin, si Δt vérifie la condition CFL (2.9) sur $V_h^{n+\frac{1}{2}}$ nous avons l'estimation sur le pas de temps $c_{\max} \Delta t < \max_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}} 2h_{\mathcal{G}} / \sqrt{\lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}}_{r_{\mathcal{G}}} \widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} \right)}$, et donc $\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(s)^2 \leq 2 \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} s \right\|_{\mathcal{G}}^2$. De même, il vient aussi $\mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(r)^2 \leq 2 \left\| \mu^{\frac{1}{2}} r \right\|_{\mathcal{G}}^2$ pour tout $r \in V_h^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{G}}$. En sommant ces deux relations et choisissant $(s, r) := \left(\check{E}^n - E^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}} - H^{n+\frac{1}{2}} \right)$, nous pouvons conclure. ■

Pour résumer, nous avons montré que Π^{n+1} est un opérateur d'interpolation à valeur initiale convenable, dans le sens où il satisfait les deux conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) . De plus, le corollaire 2.19 donne une estimation *a posteriori* sur cette étape d'interpolation grâce aux valeurs de $\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1} \circ \Pi^{n+1}$. En effet, la relation (2.43) donne une borne supérieure sur l'erreur commise sur la stabilité (condition (\mathcal{C}_1)) et l'équation (2.44) indique, avec la condition CFL, la perte de consistance (condition (\mathcal{C}_2)).

Nous avons également vu que se donner comme condition CFL celle imposée par $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$ permettait de retrouver la stabilité perdue par l'adaptation de maillage. Cette condition est suffisante mais peut s'avérer contraignante.

2.3 Validation numérique de l'opérateur d'interpolation pour le GD1D

Afin de valider la construction de l'opérateur Π , nous revenons sur l'étude des cas vus dans la section 2.1.2.

Validation de l'interpolation Π sur les exemples

Les figures 2.6 et 2.7 montrent les résultats au point $x = 1.8$ pour les deux champs (E, H) avec les flux centrés et décentrés. Nous pouvons alors voir que l'opérateur Π a permis d'éviter les instabilités dans les deux cas et de retrouver un calcul convergeant vers la solution analytique.

Cependant, nous avons vu sur le second exemple de la section 2.1.2 dans le cas des flux décentrés que le phénomène d'instabilité se produisait toujours mais sur un temps beaucoup plus long. Sur la figure 2.8 nous représentons donc les résultats au point $x = 1.8$ pour les deux champs (E, H) avec les flux décentrés pour ce second cas-test repris en temps long.

Nous pouvons alors voir que l'opérateur Π a permis d'éviter les instabilités vues dans la figure 2.4. Toutefois, un déphasage apparaît sur la solution numérique et semble s'amplifier au cours du calcul. Afin de vérifier si ce déphasage est lié à l'opérateur d'interpolation ou s'il provient de l'erreur de dispersion propre au schéma GD1D, nous représentons sur la figure 2.9 les résultats au point $x = 1.8$ pour les deux champs (E, H) pour des calculs

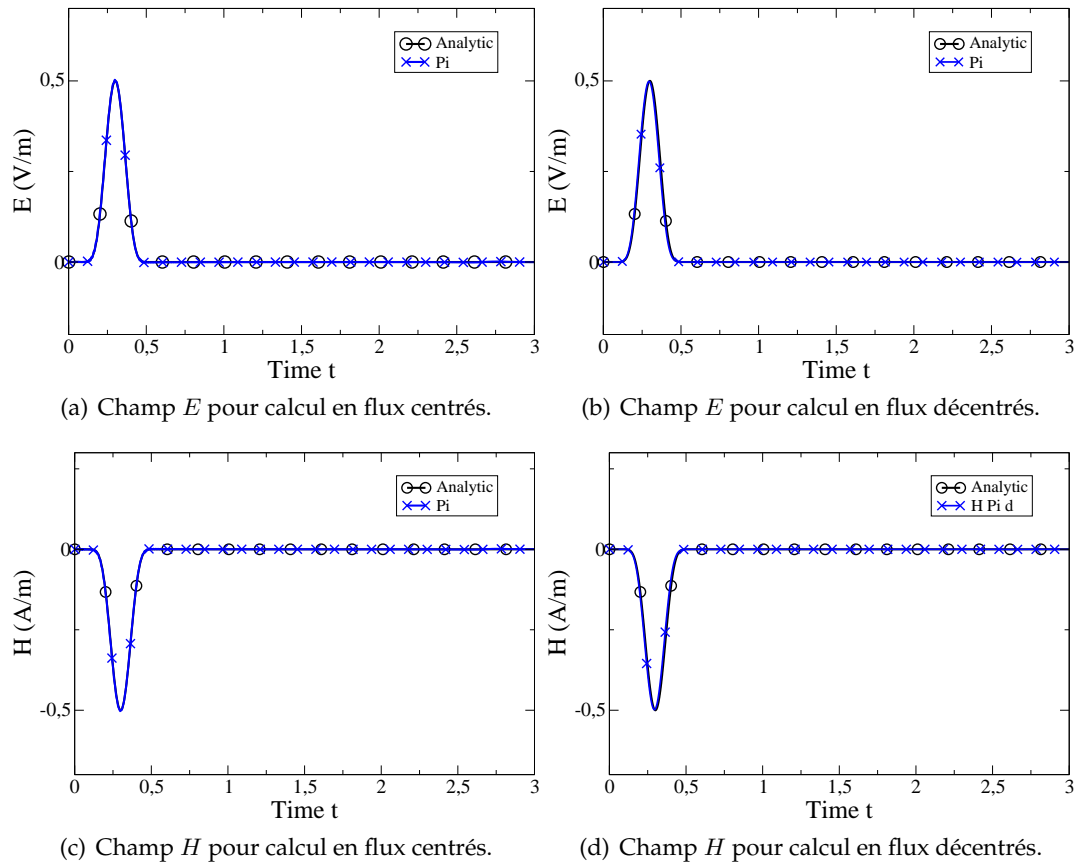


FIGURE 2.6: Application : tests numériques sur calcul en temporel de la propagation de la régularisée de l'unité avec l'opérateur Π .

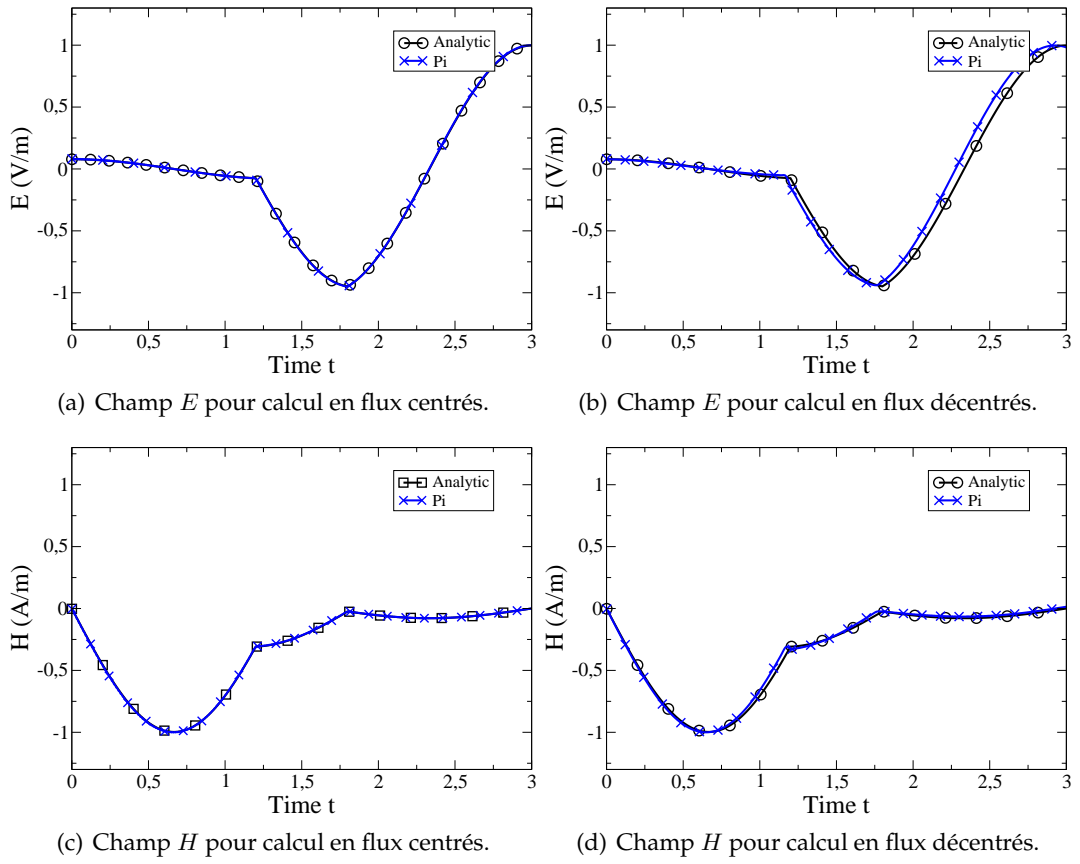


FIGURE 2.7: Application : tests numériques sur calcul en temporel de la propagation du sinus tronqué avec l'opérateur Π .

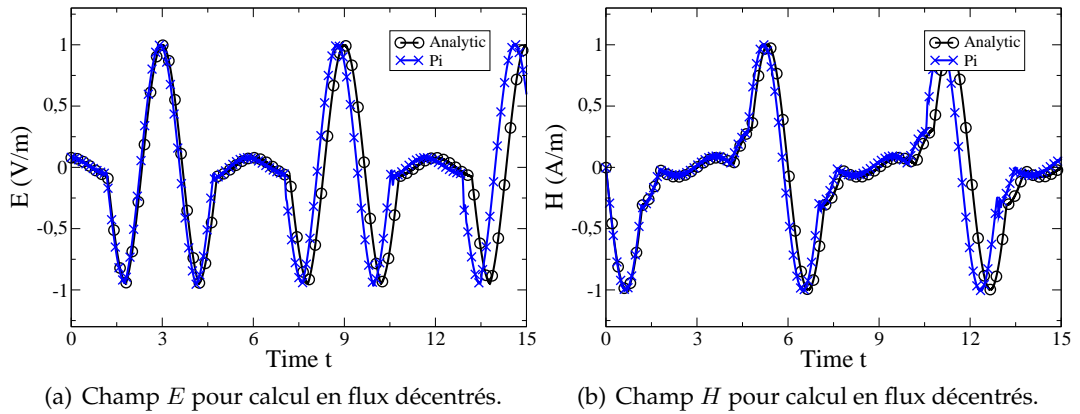


FIGURE 2.8: Application : tests numériques sur calcul en temporel de la propagation du sinus tronqué en temps long avec l'opérateur Π .

en flux décentrés effectués sur les espaces d'approximations fixes construits avec : $h, r = 3$ et $h/2, r = 2$. Nous constatons ainsi que le déphasage en fin de calculs mesuré pour la réalisation du minimum arrivant autour de $t \approx 12.667$ donne des écarts de $\Delta t_{h,Q_3} \simeq 0.248$, $\Delta t_{h/2,Q_2} = 0.248$ et $\Delta t_{h,adapt} \simeq 0.332$ respectivement pour les calculs sur espace fixe lorsque $h, r = 3$, espace fixe $h/2, r = 2$ et espace évolutif avec projection II. On note alors, que l'erreur de déphasage dans le cas évolutif ($\approx 2.62\%$) est très voisine de celles obtenues dans les cas sur espaces fixes ($\approx 1.96\%$) et donc semble essentiellement liée au schéma numérique.

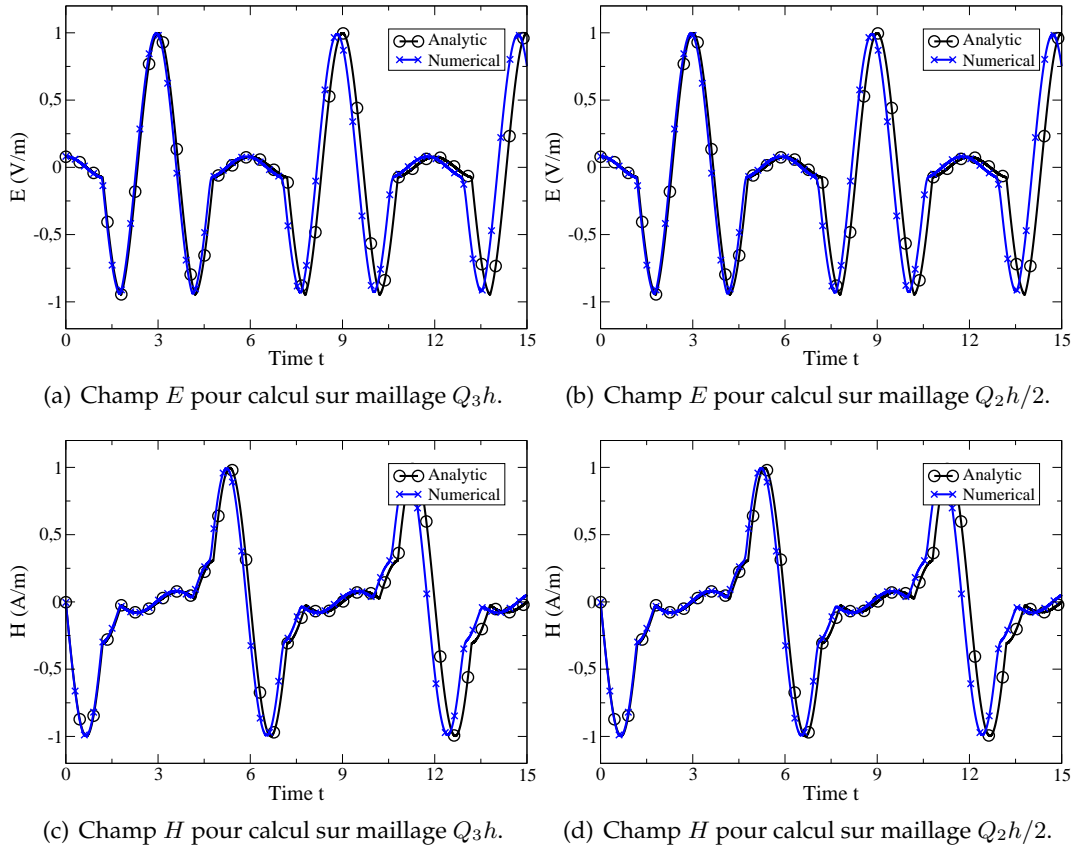
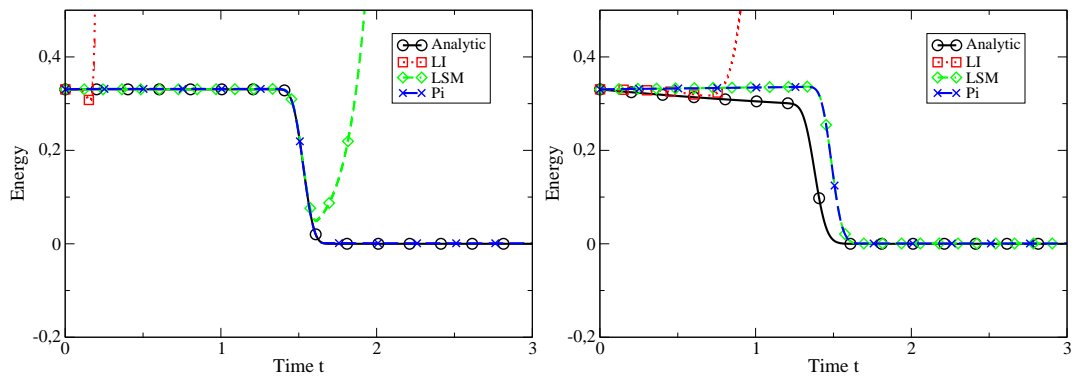


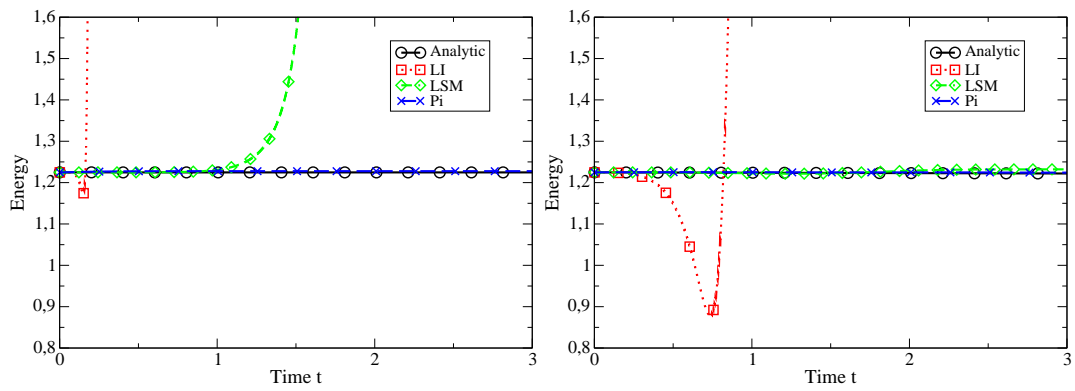
FIGURE 2.9: Application : tests numériques sur calcul en temporel de la propagation du sinus tronqué en temps long sur maillage fixe.

Étude de l'énergie discrète

Nous avons tracé sur la figure 2.10 l'énergie discrète du système au cours du temps pour les exemples traités dans la section 2.1.2 en utilisant les trois interpolations présentées : l'interpolation lagrangienne (LI), la méthode des moindres carrés (LSM) et l'opérateur II. Sur cette figure nous pouvons observer le phénomène d'instabilité par une explosion de l'énergie dans les cas LSM centrés et LI centrés et décentrés. On note aussi, dans le cas décentré pour le second exemple, que l'énergie pour la méthode LSM croît lentement. Ceci laisse alors présager du phénomène d'explosion observé par la suite en temps long. Comme



(a) Énergies discrètes sur le premier cas en flux centrés. (b) Énergies discrètes sur le premier cas en flux décentrés.



(c) Énergies discrètes sur le second cas en flux centrés. (d) Énergies discrètes sur le second cas en flux décentrés.

FIGURE 2.10: Application : énergies discrètes numériques.

espéré, les courbes utilisant le projecteur Π présentent pour leur part une énergie stable et très proche de celle associée à la solution analytique.

Validation des estimations *a posteriori* de consistance (2.44)

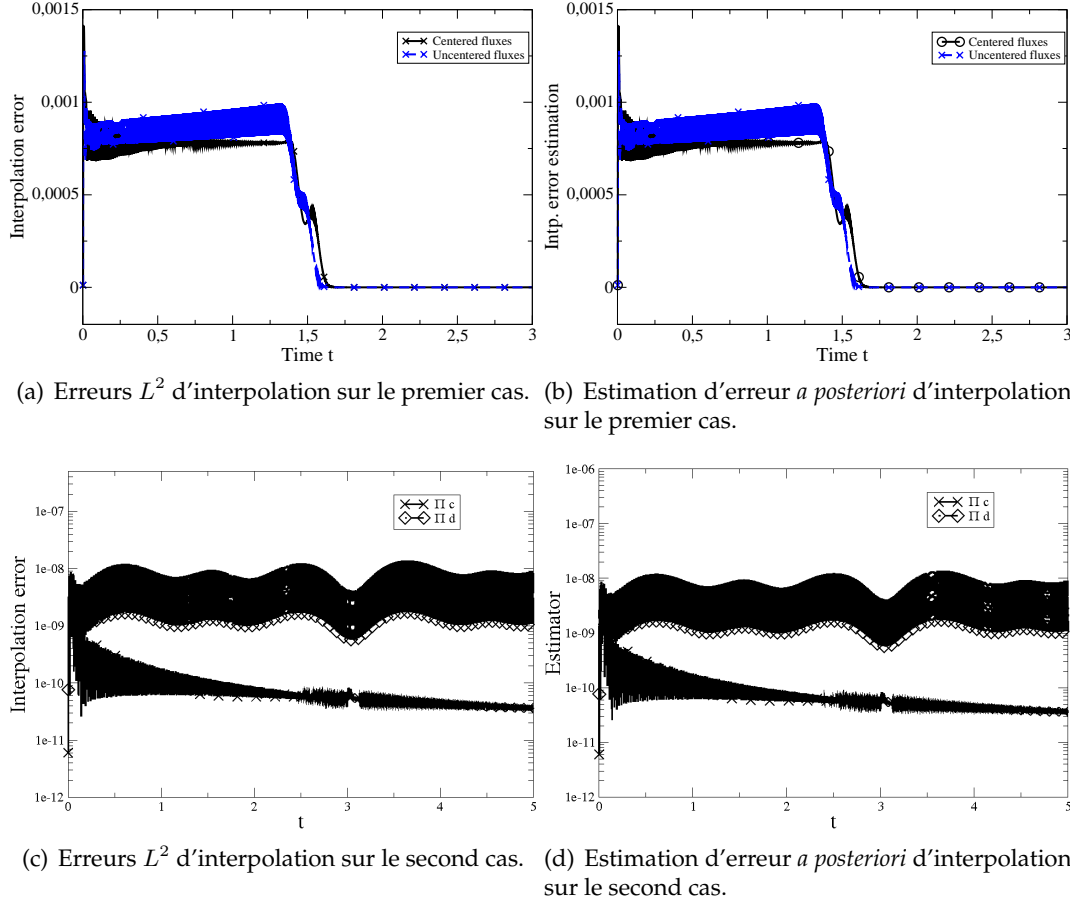
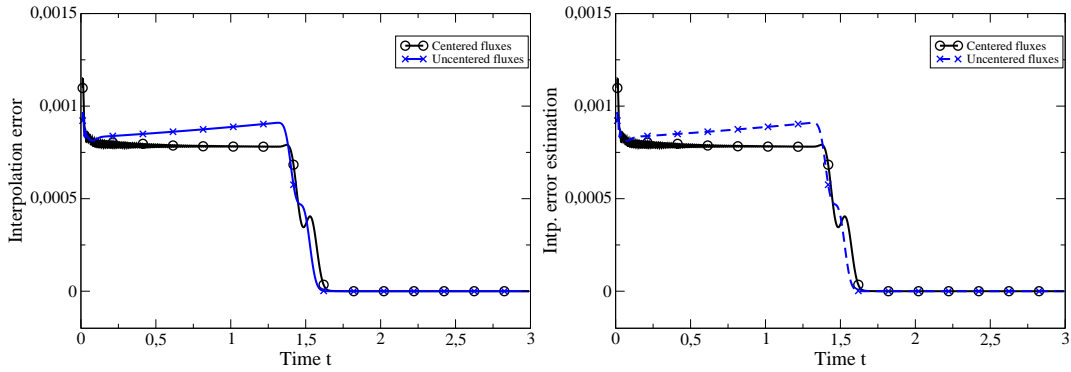


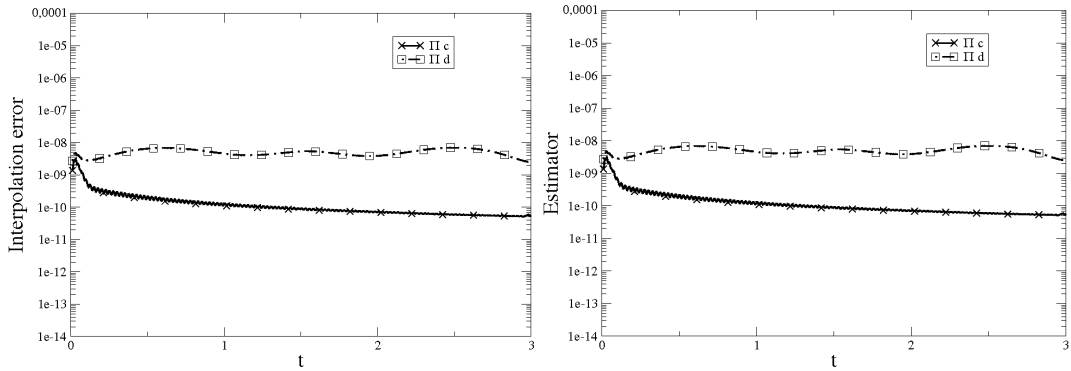
FIGURE 2.11: Application : comparaisons d'estimation d'erreur *a posteriori* (2.44) sur l'interpolation avec les erreurs L^2 numériques.

Sur la figure 2.11 sont représentées les courbes de l'erreur de consistance introduite par l'interpolation, c'est-à-dire la quantité $\left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\check{E}^n - E^n \right) \right\|_{\mathcal{K}}^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} \left(\check{H}^{n+\frac{1}{2}} - H^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\|_{\mathcal{K}}^2$, ainsi que le résidu de la construction de l'opérateur d'interpolation $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1}$ pour les différents cas. Les courbes sont données pour les calculs en flux centrés et décentrés (respectivement notés « c » et « d »). La quantité $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1}$ est alors référencée comme estimateur d'erreur *a posteriori* d'après la deuxième partie du corollaire 2.19. Nous remarquons que ces différentes courbes confirment le résultat démontré par le corollaire 2.19, c'est-à-dire que l'estimateur *a posteriori* donne une évaluation précise de l'erreur de consistance de l'interpolation commise. Toutefois, comme dans ces exemples nous effectuons un changement d'espace d'approximation à chaque itération en temps, nous obtenons des courbes d'erreur très oscillantes. Donc, afin

de mieux évaluer les tendances respectives nous proposons sur la figure 2.12 un lissage des résultats précédents par une moyenne glissante sur 20 pas de temps. Sur cette nouvelle figure, nous observons numériquement que la valeur du résidu (pris comme estimateur *a posteriori*) est quasiment égale à l'erreur de consistance sur l'interpolation conformément à l'encadrement (2.44) proposé dans le corollaire 2.19.



(a) Erreurs L^2 d'interpolation sur le premier cas. (b) Estimation d'erreur *a posteriori* d'interpolation sur le premier cas.



(c) Erreurs L^2 d'interpolation sur le second cas (moyennes courantes sur 20 points). (d) Estimation d'erreur *a posteriori* d'interpolation sur le second cas (moyennes courantes sur 20 points).

FIGURE 2.12: Application : comparaisons d'estimateur d'erreur *a posteriori* sur l'interpolation (2.44) avec les erreurs L^2 numériques (moyennes courantes sur 20 points).

Étude des coûts de la méthode

Nous pouvons également nous interroger sur les coûts engendrés par cette interpolation, qui nécessite plusieurs étapes de résolution matricielles. La table 2.1 présente les temps CPU relatifs requis pour les calculs en comparant les trois opérateurs d'interpolation utilisés.

La construction de Π est donc, pour le cas 1D, entre une et deux fois plus coûteuse que

TABLE 2.1: Temps CPU pour les calculs avec différents opérateurs d'interpolation par rapport à l'interpolation lagrangienne sur le m^Ãme cas.

Opérateur	1 ^{er} cas		2 nd cas	
	Flux centrés	Flux décentrés	Flux centrés	Flux décentrés
Lagrange	1	1	1	1
L^2	1,01	1,03	1,01	1,01
Π	1,49	1,57	1,37	1,51

les autres méthodes citées. Toutefois, ce surcoût peut être significativement réduit dans la pratique en rappelant que Π est défini localement, propriété non exploitée suffisamment par les exemples. En effet, dans un processus adaptatif, en utilisant la localité de la définition de l'opérateur d'interpolation, nous n'introduisons de surcoût que sur les (quelques) cellules où l'espace a été modifié entre deux pas de temps. De plus, l'avantage de la construction présentée dans la proposition 2.14 est d'éviter tout algorithme itératif dans la minimisation L^2 sous contraintes, et donc de limiter l'effort global requis. Ces valeurs sont donc à considérer comme des valeurs maximales que l'on n'atteindra que dans de rares cas.

2.4 Interpolation de condition initiale adaptée au schéma GD3D évolutif

Nous avons vu sur le cas 1D qu'un phénomène d'instabilité apparaît dans le calcul sur maillage adaptatif si l'opérateur d'interpolation était mal choisi. Nous avons donc proposé un opérateur adapté à notre système qui permettait d'assurer la stabilité du calcul. Maintenant, nous allons adapter l'étude menée pour le cas 1D au cas du schéma GD3D (1.21).

Nous rappelons alors les principales étapes qui vont être suivies ici :

1. La première étape consiste donc à introduire la dépendance à l'itération n du calcul en cours de l'espace d'approximation V_h , ainsi noté V_h^n . La projection de $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \in (V_h^n)^2$, nécessaire pour effectuer le calcul de l'itération $n + 1$, est notée $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \in (V_h^{n+1})^2$ puis reportée dans le schéma GD3D. Nous reprenons alors l'étude de stabilité effectuée à la section 1.2.3.1 et nous exhibons un bilan d'énergie *a priori* non-signé. Comme précédemment nous en déduisons donc deux conditions, notées (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) , nécessaires pour vérifier respectivement la stabilité et la consistance.
2. Pour la deuxième étape, nous proposons un opérateur de projection, noté $\Pi^{n+1} : (V_h^n)^2 \rightarrow (V_h^{n+1})^2$ défini implicitement par un problème d'optimisation dont nous montrons qu'il est bien défini avant de l'expliciter sur chaque cellule \mathcal{K} d'un maillage de référence grossier \mathcal{T}_h .
3. Dans la troisième étape, nous montrons que l'opérateur Π^{n+1} permet de vérifier asymptotiquement les conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) et nous obtenons une estimation *a posteriori* optimale de l'erreur introduite par cette projection.

Ces résultats permettent dans la dernière partie de cette section d'en déduire la construction d'une condition CFL auto-adaptative pour le schéma GD3D évolutif.

2.4.1 Travail préliminaire

Comme pour l'étude du schéma GD1D, nous commençons par introduire la dépendance en n de l'espace d'approximation ainsi que la présence de projection de condition initiale dans l'écriture du schéma. Par l'étude de stabilité de cette nouvelle écriture, nous en déduisons alors les conditions nécessaires à vérifier par l'opérateur d'interpolation pour garantir stabilité et consistance.

2.4.1.1 Formulation et stabilité du schéma GD3D évolutif

Dans le contexte GD3D adaptatif, nous envisageons trois types de modifications de l'espace d'approximation V_h :

- modification locale du degré de raffinement du maillage par rapport à un maillage initial \mathcal{T}_h (évolution en h),
- modification locale de l'ordre d'approximation polynomial (évolution en p),
- soit les deux (évolution hp).

Nous indiquons donc maintenant l'espace d'approximation par le numéro de l'itération en cours : V_h^n . Par analogie, le maillage associé à l'espace V_h^n sera noté \mathcal{T}_h^n .

Le premier type de modification envisagée donne des raffinements de cellules par rapport à une cellule de référence. Nous nous plaçons donc dans la perspective d'un raffinement de type « octree ». Nous avons alors l'hypothèse suivante sur les espaces $(V_h^n)_n$:

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \exists \mathcal{I} \subset \mathcal{T}_h^n / \mathcal{K} = \cup_{\mathcal{L} \in \mathcal{I}} \mathcal{L}.$$

Soit $P^{n+1} : V_h^n \times V_h^n \rightarrow V_h^{n+1} \times V_h^{n+1}$ un opérateur d'interpolation donné. Nous notons

$$\left(\check{E}^n, \check{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) := P^{n+1} \left(E^n, H^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

le champ interpolé utilisé pour le calcul au temps $n + 1$. Le système de Maxwell discrétisé adaptatif devient donc :

<p>Trouver $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}}) \in V_h^{n+1} \times V_h^{n+1}$ tel que : $\forall \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \forall (\varphi, \psi) \in V_h^{n+1} _{\mathcal{L}} \times V_h^{n+1} _{\mathcal{L}}$</p> $\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{K}} \frac{\bar{\epsilon}}{\Delta t} \mathbf{E}^{n+1} - \check{\mathbf{E}}^n \cdot \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{K}} \nabla \times \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} \\ \quad = \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \partial \Omega} -\frac{1}{2} \left[\check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \cdot \varphi \, ds + \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda}{Z_{\mathcal{K}}} \left[\mathbf{n} \times \left(\check{\mathbf{E}}^n \times \mathbf{n} \right) \right]_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \cdot \varphi \, ds \\ \int_{\mathcal{K}} \frac{\bar{\mu}}{\Delta t} \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}} - \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}} \nabla \times \mathbf{E}^{n+1} \cdot \psi \, d\mathbf{x} \\ \quad = \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \partial \Omega} \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}^{n+1} \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \cdot \psi \, ds + \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda}{Y_{\mathcal{K}}} \left[\mathbf{n} \times \left(\check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right) \right]_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \cdot \psi \, ds \\ \quad + \int_{\partial \mathcal{K} \cap \partial \Omega} \left[\mathbf{E}^{n+1} \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \cdot \psi \, ds. \end{array} \right. \quad (2.45)$
--

Nous devons donc retrouver les résultats équivalents aux résultats de stabilité obtenus sur le schéma en maillage statique dans le chapitre 1.

En suivant la démonstration de stabilité de la section 2.2.1.2 pour le schéma GD1D, nous introduisons alors la définition de l'énergie discrète dans le cas évolutif

$$\mathcal{E}_P^n = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} \left(\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^n \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^n + \bar{\mu} \mathbf{H}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n-\frac{1}{2}} \right) d\mathbf{x},$$

ainsi que l'énergie discrète modifiée pour le schéma GD3D correspondante

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{E}}_P^{n+1} &:= \mathcal{E}_P^{n+1} - \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \int_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda \Delta t}{4Z_{\partial \mathcal{L}}} \llbracket \mathbf{E}^{n+1} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \cdot \llbracket \mathbf{E}^{n+1} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} ds \\ &+ \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \int_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda \Delta t}{4Y_{\partial \mathcal{L}}} \llbracket \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \cdot \llbracket \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} ds. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Remarque 2.20 La présence du terme $1/4$ dans (2.46), là où il n'est que de $1/2$ dans (1.23), vient du parcours effectué ici sur les éléments (donc balayant deux fois les faces internes).

Enfin, nous utilisons la notation suivante pour la moyenne sur une frontière $\Gamma \subset \partial \mathcal{K}$:

- si $\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^i$, alors $\Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ pour $\mathcal{K}' \in \mathcal{T}_h$, et $\llbracket v \rrbracket_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = (v|_{\mathcal{K}'}|_{\Gamma} + v|_{\mathcal{K}}|_{\Gamma})/2$;
- si $\Gamma \in \partial \mathcal{T}_h^e$, alors $\Gamma = \mathcal{K} \cap \partial \Omega$ pour $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, et $\llbracket v \rrbracket_{\Gamma}^{\mathcal{K}} = v|_{\Gamma}$.

Nous pouvons maintenant étudier la stabilité du GD3D avec ces nouvelles quantités.

Théorème 2.21 (Évolution de l'énergie sur maillage évolutif 3D) Avec les notations précédentes, l'évolution de l'énergie sur le domaine Ω au temps $n+1$ pour le schéma GD3D évolutif (2.45) est donnée dans le cas des flux centrés par :

$$\mathcal{E}_P^{n+1} - \mathcal{E}_P^n = \Delta t \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right), \quad (2.47)$$

où la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n : V_h^n|_{\mathcal{K}} \times V_h^n|_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(\mathbf{w}, \mathbf{z}) &:= \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^n, \mathcal{L} \subset \mathcal{K}} \left(\frac{a_{\mathcal{L}}(\varepsilon \mathbf{w}, \mathbf{w}) + a_{\mathcal{L}}(\mu \mathbf{z}, \mathbf{z})}{\Delta t} + r_{\mathcal{L}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{L}} \llbracket \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \cdot \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} ds. \end{aligned}$$

avec $a_{\mathcal{K}}$ et $r_{\mathcal{K}}$, deux formes bilinéaires définies pour tous $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbf{H}(\text{rot}, \mathcal{K}) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \mathcal{K})$ par :

$$a_{\mathcal{K}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \int_{\mathcal{K}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} d\mathbf{x} \text{ et } r_{\mathcal{K}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \int_{\mathcal{K}} (\nabla \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{x}.$$

Dans le cas des flux décentrés, nous avons l'estimation suivante

$$\widetilde{\mathcal{E}}_P^{n+1} - \widetilde{\mathcal{E}}_P^n \leq \Delta t \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right) \quad (2.48)$$

où la fonctionnelle $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n : V_h^n|_{\mathcal{K}} \times V_h^n|_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(\mathbf{w}, \mathbf{z}) := \mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - \sum_{\substack{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K} \\ \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^n}} \int_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \left[\frac{\lambda}{4Z_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}}} \left(\llbracket \mathbf{w} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \right)^2 + \frac{\lambda}{4Y_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}}} \left(\llbracket \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \right)^2 \right] ds.$$

Enfin, si Δt satisfait la condition CFL pour les deux espaces V_h^n et V_h^{n+1} alors \mathcal{E}_P^n , \mathcal{E}_P^{n+1} , $\widetilde{\mathcal{E}}_P^n$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_P^{n+1}$ sont des formes quadratiques définies positives.

Preuve. La méthode de démonstration reste la même que celle utilisée pour prouver le résultat sur le cas 1D montré dans le théorème 2.7 : il faut écrire les équations (2.45) sur un élément $\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}$ au temps $n+1$, en considérant les fonctions-tests $(\phi, \psi) = (\mathbf{E}^{n+1} + \check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$, puis considérer la seconde équation de (2.45) au temps n avec la fonction-test $\psi = \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$.

Nous réassemblons sur une cellule $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ donnée, pour tous les $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h^n$ et $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h^{n+1}$ pour obtenir, en utilisant les valeurs choisies pour les différents coefficients de flux, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{n+1} - \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^n}{\Delta t} \\ &= \sum_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \frac{\left\| \varepsilon^{1/2} \check{\mathbf{E}}^n \right\|_{\mathcal{L}}^2 + \left\| \mu^{1/2} \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{L}}^2}{\Delta t} - \sum_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \frac{\left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}^n \right\|_{\mathcal{J}}^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{J}}^2}{\Delta t} \\ &+ \sum_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} r_{\mathcal{L}} \left(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \sum_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} r_{\mathcal{J}} \left(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \sum_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \int_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \left[\left(-\frac{1}{2} \left\| \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right\|_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} - \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right) \cdot \left(\mathbf{E}^{n+1} + \check{\mathbf{E}}^n \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \left\| \mathbf{E}^{n+1} \times \mathbf{n} \right\|_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} + \frac{\lambda}{Y_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}}} \left\| \mathbf{n} \times \left(\check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right) \right\|_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \right] \cdot \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \right] ds \\ &+ \sum_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \int_{\partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \left[\left[\frac{1}{2} \left\| \mathbf{E}^n \times \mathbf{n} \right\|_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} + \frac{\lambda}{Y_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}}} \left\| \mathbf{n} \times \left(\check{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right) \right\|_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \right] \cdot \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{Z_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}}} \left\| \mathbf{n} \times \left(\check{\mathbf{E}}^n \times \mathbf{n} \right) \right\|_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \cdot \left(\mathbf{E}^{n+1} + \check{\mathbf{E}}^n \right) \right] ds \\ &- \sum_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \int_{\partial \mathcal{L} \cap \partial \Omega} \left\| \check{\mathbf{E}}^n \times \mathbf{n} \right\|_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \cdot \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} ds \\ &+ \sum_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \int_{\partial \mathcal{J} \cap \partial \Omega} \left\| \mathbf{E}^n \times \mathbf{n} \right\|_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} ds. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Nous réécrivons maintenant les termes de sauts intérieurs ne dépendant pas de λ . Ainsi, pour deux cellules $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{T}_h^{n+1}$, de frontière commune Γ , et dont la normale \mathbf{n}_Γ sera orientée de \mathcal{K} vers \mathcal{K}' , nous obtenons deux termes : la partie du saut définie sur Γ comme frontière de \mathcal{K} s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [(\mathbf{E}_{\mathcal{K}'}^{n+1} - \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^{n+1}) \times \mathbf{n}_\Gamma] \cdot \check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} ds \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\left(\check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} + \check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}'}^{n+\frac{1}{2}} \right) \times \mathbf{n}_\Gamma \right] \cdot (\mathbf{E}_{\mathcal{K}}^{n+1} + \check{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}'}^n) ds, \end{aligned}$$

et la partie du saut définie sur Γ comme frontière de \mathcal{K}' :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [(\mathbf{E}_{\mathcal{K}'}^{n+1} - \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^{n+1}) \times \mathbf{n}_\Gamma] \cdot \check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}'}^{n+\frac{1}{2}} ds \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\left(\check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} + \check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}'}^{n+\frac{1}{2}} \right) \times \mathbf{n}_\Gamma \right] \cdot (\mathbf{E}_{\mathcal{K}'}^{n+1} + \check{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n) ds. \end{aligned}$$

La somme de ces deux termes donne :

$$\int_{\partial \mathcal{K}} \left[\frac{1}{2} \left(\check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} + \check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}'}^{n+\frac{1}{2}} \right) \times \mathbf{n}_\Gamma \right] \cdot (\check{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}'}^n - \check{\mathbf{E}}_{\mathcal{K}}^n) ds = \int_{\partial \mathcal{K}} \left\{ \check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_\Gamma \right\}_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \cdot \left[\check{\mathbf{E}}^n \right]_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} ds. \quad (2.50)$$

Rappelons que la formule du double produit vectoriel donne :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

Il vient ainsi que l'équation (2.50) peut se réécrire :

$$\int_{\partial \mathcal{K}} \left\{ \check{\mathbf{H}}_{\mathcal{K}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_\Gamma \right\}_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \cdot \left[\mathbf{n} \times (\check{\mathbf{E}}^n \times \mathbf{n}) \right]_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} ds. \quad (2.51)$$

De même, pour les termes de bord, on obtient l'identité

$$\int_{\partial \mathcal{J} \cap \partial \Omega} [\mathbf{E}^n \times \mathbf{n}]_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} ds = - \int_{\partial \mathcal{J} \cap \partial \Omega} \left\{ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^n \times \mathbf{n}) \right\}_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \cdot \left[\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right] ds.$$

La somme des bilans donnés par l'égalité (2.49) sur toutes les cellules \mathcal{K} , combinée avec l'équation (2.51), permet d'obtenir le bilan suivant

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_P^{n+1} - \mathcal{E}_P^n}{\Delta t} &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right) \\ &- \sum_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \int_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda}{2Z_{\partial \mathcal{L}}} \left(\left[\left[\check{\mathbf{E}}^n \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \right]^2 + \left[\check{\mathbf{E}}^n \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \cdot \left[\mathbf{E}^{n+1} \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \right) ds \\ &- \sum_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}} \int_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda}{2Y_{\partial \mathcal{L}}} \left[\left[\check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \right]^2 ds \\ &- \sum_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n} \int_{\partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \frac{\lambda}{2Y_{\partial \mathcal{J}}} \left[\check{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \cdot \left[\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right]_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} ds. \end{aligned}$$

L'inégalité (2.48) est directement donnée en appliquant l'identité $-2ab \leq a^2 + b^2$ aux termes de bord de l'équation bilan précédente.

Enfin, l'énergie discrète modifiée au temps $n + 1$ définie par (2.46) n'est composée que de termes vivant dans le même espace (V_h^{n+1}) et est donc vue comme l'énergie discrète modifiée sur un pas d'avancée en temps du schéma sur espace statique (1.21) (ici $V_h \equiv V_h^{n+1}$) et prenant comme donnée d'initialisation les champs $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \in (V_h^{n+1})^2$. Par le théorème 1.10, si Δt vérifie la condition CFL (1.25) alors $\widetilde{\mathcal{E}}_P^{n+1}$ est définie positive. De même pour $\widetilde{\mathcal{E}}_P^n$ sous la condition CFL correspondant à l'espace V_h^n .

Le résultat pour \mathcal{E}_P^n et \mathcal{E}_P^{n+1} se déduit alors en prenant $\lambda = 0$. ■

2.4.1.2 Bilan sur les conditions nécessaires sur l'opérateur d'interpolation

Le théorème 2.21 montre à nouveau que choisir Δt comme le minimum de toutes les conditions CFL de chaque V_h^n vu comme un espace de calcul statique ne garantit pas nécessairement la stabilité du schéma. D'un autre côté, il vient aussi qu'une condition suffisante serait d'assurer

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\widetilde{\mathcal{F}}_K^{n+1}(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}}_K^n(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right] \leq 0. \quad (2.52)$$

Il vient alors rapidement qu'un choix convenable pour P^{n+1} devrait être celui qui donne les projections $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ des valeurs initiales $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ telles que (2.52) soit vérifiée. Notons qu'il devrait ainsi donner les mêmes propriétés sur le bilan d'énergie pour le schéma adaptatif que celles décrites dans la proposition 1.9 pour des espaces d'approximation fixes. Pour assurer la convergence du schéma, il doit également donner un couple $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ proche de $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$.

En résumant, nous cherchons un opérateur d'interpolation tel que :

(C ₁) : stabilité	$\left \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\widetilde{\mathcal{F}}_K^{n+1}(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}}_K^n(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right] \right \rightarrow 0,$
(C ₂) : consistance	$\left\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mathbf{E}^n - \check{\mathbf{E}}^n) \right\ _{\Omega}^2 + \left\ \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \right\ _{\Omega}^2 \rightarrow 0.$

Ainsi, les conditions (C₁) et (C₂) traduisent respectivement que l'opérateur d'interpolation P^{n+1} est choisi pour préserver la stabilité et la consistance du schéma.

Remarque 2.22 Pour le système (2.45), quand $V_h^n = V_h^{n+1}$, le choix évident de $P^{n+1} = \text{Id}$ satisfait les conditions (C₁) et (C₂). De plus, comme dans ce cas $\widetilde{\mathcal{F}}_K^{n+1}(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) = \widetilde{\mathcal{F}}_K^n(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, le théorème 2.21 induit les résultats de la proposition 1.9 et implique donc la stabilité du schéma telle que montrée dans le théorème 1.10.

2.4.2 Proposition d'un opérateur d'interpolation local 3D

L'analyse de la stabilité donnée par la proposition 2.21 montre, comme dans le cas 1D (section 2.2.2) qu'il faut contrôler la quantité $\widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n$. Cette fonction étant naturellement découpée sur le maillage de référence \mathcal{T}_h , nous allons donc proposer un opérateur d'interpolation construit sur chaque cellule de ce maillage.

2.4.2.1 Proposition de l'opérateur d'interpolation local par optimisation

Comme dans le cas 1D, nous proposons une définition d'un opérateur d'interpolation par morceaux localement sur chaque élément de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$.

Définition 2.23 (Opérateur d'interpolation à valeur initiale) Soit Π^{n+1} l'opérateur d'interpolation à valeur initiale pour le schéma GD3D (2.45) :

$$\begin{aligned} \Pi^{n+1} : V_h^n \times V_h^n &\longrightarrow V_h^{n+1} \times V_h^{n+1} \\ (\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) &\longmapsto (\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

où $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ est défini localement sur chaque élément $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ par

$$(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})|_{\mathcal{K}} := \underset{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}})}{\operatorname{argmin}} [\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z})]^2, \quad (2.53)$$

en notant $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} = \{\mathcal{J} \cap \mathcal{L}, \mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n, \mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}\}$, $\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}$ est donnée par

$$\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) := \left[\sum_{\substack{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} \\ \mathcal{G} \subset \mathcal{K}}} \left(\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(\mathbf{w} - \mathbf{E}^n)^2 + \mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

et en utilisant les normes à poids $\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(\mathbf{s})^2 := \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{s} \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \nabla \times \mathbf{s} \right\|_{\mathcal{G}}^2$ et $\mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(\mathbf{s})^2 := \left\| \mu^{\frac{1}{2}} \mathbf{s} \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \nabla \times \mathbf{s} \right\|_{\mathcal{G}}^2$ pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$.

L'existence de l'image de Π^{n+1} , donc de la solution au problème d'optimisation (2.53), est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.24 Il existe une unique solution au problème de minimisation (2.53).

Preuve. Il suffit de remarquer que, pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, la fonction $\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}$ est ici une norme, donc convexe, et que $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc fermé et convexe. L'existence et l'unicité d'une solution au problème de minimisation est alors garantie. ■

Remarque 2.25 Contrairement au cas 1D, dans la définition de Π^{n+1} nous n'avons pas introduit de contrainte sur les bords de la cellule de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$. La motivation est essentiellement pratique car si on sait « facilement » contrôler les valeurs de la fonction projetée au bord de \mathcal{K} en 1D, ce type de contrainte imposerait des conditions a priori extrêmement difficiles à vérifier.

Nous ne posons donc ici aucune restriction sur les degrés de raffinement $k_{\mathcal{K}}$ et l'ordre d'approximation $r_{\mathcal{K}}$. Nous verrons en effet que pour le cas 3D nous retrouvons malgré tout dans ce cas les résultats de stabilité similaires à ceux obtenus dans la partie 1D.

2.4.2.2 Explicitation de l'opérateur

En se servant de la définition 2.23, nous proposons la construction de Π^{n+1} sur chaque cellule de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ indépendamment, et nous donnons ainsi deux explicitations de cet opérateur pour $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$ (proposition 2.26) et pour le cas général (proposition 2.27).

Projection dans le cas du raffinement seul ($V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$)

Proposition 2.26 Sur toute cellule de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, si $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$, alors la restriction sur \mathcal{K} de l'opérateur d'interpolation à valeur initiale Π^{n+1} est $\text{Id}_{\mathcal{K}}$.

Preuve. Soit donc $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ une cellule de référence donnée telle que $V_h^n|_{\mathcal{K}} \subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$. Donc, $\left(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}\right)|_{\mathcal{K}} \in V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$. Par (2.53), il vient

$$\left[\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}\left(\mathbf{E}^n|_{\mathcal{K}}, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{K}}\right)\right]^2 = 0 \leq \underset{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}})}{\text{argmin}} \left[\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z})\right]^2.$$

Ainsi, par l'unicité de la solution vue dans la proposition 2.24, on en déduit que la solution est donnée par $\Pi^{n+1}\left(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}\right)|_{\mathcal{K}} = \left(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}\right)|_{\mathcal{K}}$. ■

Nous retrouvons ainsi que dans le cas où l'adaptation se fera dans le sens du raffinement seul, la projection se fait par interpolation lagrangienne qui sera ici exacte.

Projection dans le cas du maillage adapté ($V_h^n|_{\mathcal{K}} \not\subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$)

Proposition 2.27 Sur chaque cellule de référence $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ avec $V_h^n|_{\mathcal{K}} \not\subseteq V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$, la restriction sur \mathcal{K} de l'opérateur d'interpolation Π^{n+1} est

$$\Pi^{n+1}\left(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}\right)|_{\mathcal{K}} = \left(\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{K}}} U_{\mathcal{K},i}^n \phi_i^{\mathcal{K}}, \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{K}}} V_{\mathcal{K},i}^{n+\frac{1}{2}} \phi_i^{\mathcal{K}}\right),$$

où les coordonnées $(U_{\mathcal{K},i}^n)_i$ et $(V_{\mathcal{K},i}^{n+\frac{1}{2}})_i$, écrites dans la base $\{\phi_i^{\mathcal{K}}, i = 1, \dots, N_{\mathcal{K}}\}$ de $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$, sont calculées par

$$P := \mathbf{A}^{-1}Y, \quad (2.54)$$

avec les matrices et vecteurs définis comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\varepsilon} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{R}_{\mu} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\mu} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{R}_{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{\delta} = (a_{\mathcal{K}}(\delta \phi_i^{\mathcal{K}}, \phi_j^{\mathcal{K}}))_{1 \leq i,j \leq N_{\mathcal{K}}}, \mathbf{R}_{\delta} = (a_{\mathcal{K}}(\delta^{-1} \nabla \times \phi_i^{\mathcal{K}}, \nabla \times \phi_j^{\mathcal{K}}))_{1 \leq i,j \leq N_{\mathcal{K}}} \text{ pour } \delta \in \{\varepsilon, \mu\},$$

$$Y = \begin{pmatrix} a_{\mathcal{K}}(\varepsilon \mathbf{E}^n, \phi_1^{\mathcal{K}}) + \frac{\Delta t^2}{4} a_{\mathcal{K}}(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^n, \nabla \times \phi_1^{\mathcal{K}}) \\ \vdots \\ a_{\mathcal{K}}(\varepsilon \mathbf{E}^n, \phi_{N_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}) + \frac{\Delta t^2}{4} a_{\mathcal{K}}(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^n, \nabla \times \phi_{N_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}) \\ a_{\mathcal{K}}(\mu \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \phi_1^{\mathcal{K}}) + \frac{\Delta t^2}{4} a_{\mathcal{K}}(\varepsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \times \phi_1^{\mathcal{K}}) \\ \vdots \\ a_{\mathcal{K}}(\mu \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \phi_{N_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}) + \frac{\Delta t^2}{4} a_{\mathcal{K}}(\varepsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \times \phi_{N_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}) \end{pmatrix}.$$

Comme formulé dans la remarque 2.25, contrairement au système 1D, nous avons choisi de nous passer du contrôle des valeurs aux bords qui se seraient traduites par un ajout de contraintes surfaciques. La formule pour la construction de Π dans la proposition 2.27 est alors plus simple que celle de la proposition 2.14. Enfin, nous le verrons ultérieurement que ces termes *a priori* négligés peuvent en effet être contrôlés par la norme volumique sous des contraintes de régularité d'approximation.

Preuve. Les calculs similaires à ceux vus dans la démonstration de la proposition 2.14 donnent que la solution du problème est $P = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T Y$. Cependant, en remarquant que \mathbf{A} est la matrice de la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mathcal{K}} : (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}})^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1), (\mathbf{w}_2, \mathbf{z}_2)) &\longmapsto a_{\mathcal{K}}(\varepsilon \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) + \frac{\Delta t^2}{4} a_{\mathcal{K}}(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{w}_1, \nabla \times \mathbf{w}_2) \\ &\quad + a_{\mathcal{K}}(\mu \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) + \frac{\Delta t^2}{4} a_{\mathcal{K}}(\varepsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{z}_1, \nabla \times \mathbf{z}_2). \end{aligned}$$

Comme $\vartheta_{\mathcal{K}}$ définit un produit scalaire, comparable au produit scalaire usuel sur $\mathbf{H}(\text{rot})$, sur $V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}$, \mathbf{A} est donc symétrique définie positive. La matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose de \mathbf{A} est donc égale à son inverse, qui existe car \mathbf{A} est définie positive, et la résolution du problème d'interpolation devient $P = \mathbf{A}^{-1}Y$. ■

En conclusion, nous avons une définition locale et directe de l'interpolation Π^{n+1} . Il passe dans ce cas-ci par une simple résolution de système matriciel, sans étape de correction des traces comme vu auparavant sur le cas 1D. La structure de la matrice reste toutefois similaire à celle du problème 1D.

2.4.3 Pertinence et contrôle de l'erreur a posteriori de l'opérateur d'interpolation 3D

Dans cette section, nous montrons que l'opérateur Π^n proposé dans la définition 2.23 vérifie (dans un sens que nous allons préciser) les conditions formulées dans la section 2.4.1.2. En outre, nous montrons que nous obtenons un contrôle *a posteriori* de l'erreur introduite dans ce cas similaire à celui formulé pour l'opérateur d'interpolation du schéma GD1D.

2.4.3.1 Pertinence de l'opérateur d'interpolation 3D

Avec la définition 2.23, nous avons proposé un opérateur d'interpolation Π^{n+1} comme pour le cas 1D. Il reste toutefois à montrer que ce choix est judicieux dans le sens où il satisfait les conditions (C_1) et (C_2) . Pour ce faire, nous étudions Π^{n+1} dans le cas où la minimisation dans (2.53) converge vers 0. Pour mesurer cette convergence, nous considérons le résidu donné par la fonction-coût $\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}$ au point optimal $\Pi^{n+1}(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$.

Nous introduisons l'espace $V_h^{n+\frac{1}{2}}$ défini par $V_h^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{G}} := \max(V_h^n|_{\mathcal{G}}, V_h^{n+1}|_{\mathcal{G}})$, pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$, où le maximum doit être pris au sens de l'inclusion. L'espace d'approximation $V_h^{n+\frac{1}{2}}$ regroupe donc l'ensemble des cellules les plus petites sur V_h^n et V_h^{n+1} , avec l'ordre d'approximation le plus élevé sur ces cellules. Le maillage associé à $V_h^{n+\frac{1}{2}}$ correspond donc naturellement à $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$ tel qu'il a été introduit dans la définition 2.23.

Théorème 2.28 (Pertinence de l'opérateur d'interpolation) *Supposons les hypothèses suivantes vérifiées :*

1. *pour tout élément $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, il existe trois constantes C_1 , C_2 et C_3 strictement positives et indépendantes de \mathcal{K} et $r_{\mathcal{K}}$ telles que :*

$$\lambda_{\max}(DF_{\mathcal{K}}DF_{\mathcal{K}}^*) \leq C_1 h_{\mathcal{K}}^2, \quad (2.55a)$$

$$\min_{\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathcal{K}}} (|J_{\mathcal{K}}| \|DF_{\mathcal{K}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}\|(\hat{\mathbf{x}})) \geq C_2 |\partial \mathcal{K}|, \quad (2.55b)$$

$$\frac{h_{\mathcal{K}}^3}{|\partial \mathcal{K}|} \geq C_3 h_{\mathcal{K}}, \quad (2.55c)$$

2. *le pas de temps Δt satisfait la condition CFL (1.25) sur $V_h^{n+\frac{1}{2}}$, alors, si $(\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1} \circ \Pi^{n+1})(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ tend vers 0 sur toute cellule $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites.*

Ces hypothèses demandent de contrôler la régularité du maillage, c'est-à-dire les déformations de $\hat{\mathcal{K}}$ par la transformation $F_{\mathcal{K}}$, en assurant que les mailles conservent une forme « assez » proche de celle d'un parallélépipède cubique.

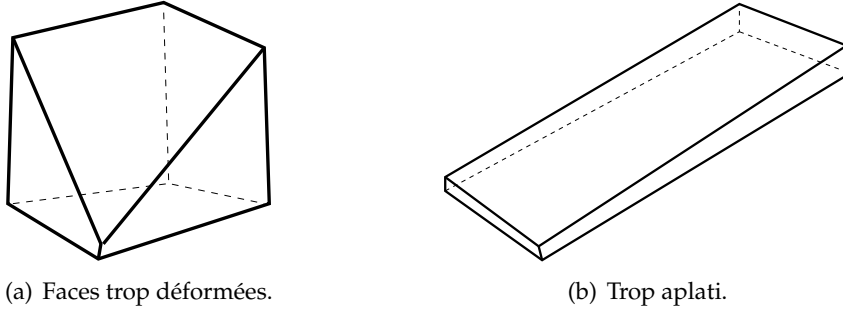


FIGURE 2.13: Exemples d'héxaèdres déconseillés dans le maillage.

La figure 2.13 illustre les formes de mailles que nous souhaitons éviter. L'hypothèse (2.55b) limite la déformation des faces et évite les cas où une face quadrangle est trop proche d'une forme triangulaire (l'un des côtés du quadrangle est très petit devant les autres). L'hypothèse (2.55c) évite les cas où la déformation de l'héxaèdre prédomine dans une direction, donnant une forme fortement aplatie, ayant une grande surface mais un volume très faible, et assure que la différence entre le rayon intérieur et le rayon extérieur ne soit pas trop importante. Le résultat (2.55a) est quant à lui une propriété des transformations dont on trouvera la preuve dans [30, 81].

Nous aurons besoin du lemme suivant avant de démontrer le théorème 2.28.

Lemme 2.29 Soit \mathcal{G} un élément de $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{s} \in V_h^{n+\frac{1}{2}}$. Alors, sous les hypothèses du théorème 2.28, il existe des constantes positives (notées C) indépendantes de $h_{\mathcal{G}}$, $r_{\mathcal{G}}$ et Δt telles que :

$$\int_{\partial\mathcal{G}} \frac{\Delta t}{2Z_{\partial\mathcal{G}}} (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \, ds \leq C (\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(\mathbf{s}))^2, \quad (2.56a)$$

$$\int_{\partial\mathcal{G}} \frac{\Delta t}{2Y_{\partial\mathcal{G}}} (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \, ds \leq C (\mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(\mathbf{s}))^2. \quad (2.56b)$$

Preuve. Les deux estimations étant obtenues de façon similaire, nous ne démontrerons que la relation (2.56a). Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$. Le degré polynomial sur $V_h^{n+\frac{1}{2}}|_{\mathcal{G}}$ est noté $r_{\mathcal{G}}$. Avec les notations du théorème 1.10, il vient l'inégalité :

$$\forall \hat{\mathbf{u}} \in Q_{r_{\mathcal{G}}}(\hat{\mathcal{K}}), \|\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}\|_{\partial\hat{\mathcal{K}}}^2 \leq \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{B}}_{r_{\mathcal{G}}} \widehat{\mathcal{M}}_{r_{\mathcal{G}}}^{-\frac{1}{2}} \right) \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\hat{\mathcal{K}}}^2. \quad (2.57)$$

Comme pour la preuve du théorème 1.10, en posant $\tilde{\mathbf{s}} = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{s}$ et $\hat{\mathbf{s}} = DF_{\mathcal{K}} \tilde{\mathbf{s}}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{G}} \frac{\Delta t}{2Z_{\partial\mathcal{G}}} (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \, ds &= \int_{\partial\mathcal{G}} \frac{c(\mathbf{x})\Delta t}{2} (\mathbf{n} \times (\sqrt{\varepsilon} \mathbf{s})) \cdot (\mathbf{n} \times (\sqrt{\varepsilon} \mathbf{s})) \, ds \\ &\leq \frac{c_{\max}\Delta t}{2} \int_{\partial\hat{\mathcal{K}}} \frac{1}{|J_{\mathcal{G}}| \|DF_{\mathcal{G}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}\|} (DF_{\mathcal{G}}^* DF_{\mathcal{G}})(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}) \, d\hat{s} \leq \frac{c_{\max}\Delta t}{2\Lambda_{\mathcal{G}}} \left\| \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}}{\|DF_{\mathcal{G}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}\|^{\frac{1}{2}}} \right\|_{\partial\hat{\mathcal{K}}}^2. \end{aligned}$$

Par la condition CFL sur le système de Maxwell 3D (1.25), et en reportant la relation (2.57), nous pouvons majorer par :

$$\leq 2 \int_{\partial \hat{K}} \frac{1}{\|DF_{\mathcal{G}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}\|} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} \, ds.$$

Par retour à l'élément \mathcal{G} , on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{G}} \frac{\Delta t}{2Z_{\partial \mathcal{G}}} (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \, ds &\leq 2 \int_{\mathcal{G}} \frac{1}{|J_{\mathcal{G}}| \|DF_{\mathcal{G}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}\|} (DF_{\mathcal{G}} DF_{\mathcal{G}}^*) \tilde{\mathbf{s}} \cdot \tilde{\mathbf{s}} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{2\lambda_{\max}(DF_{\mathcal{G}} DF_{\mathcal{G}}^*)}{\min(|J_{\mathcal{G}}| \|DF_{\mathcal{G}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}\|)} \|\sqrt{\varepsilon} \mathbf{s}\|_{\mathcal{G}}^2 \leq \frac{2\lambda_{\max}(DF_{\mathcal{G}} DF_{\mathcal{G}}^*)}{\min(|J_{\mathcal{G}}| \|DF_{\mathcal{G}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}\|)} \mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(\mathbf{s})^2. \end{aligned}$$

Enfin, avec les hypothèses (2.55a), (2.55b) et (2.55c), nous pouvons conclure. ■

Preuve du théorème 2.28. Nous montrons dans un premier temps que (\mathcal{C}_2) est vérifiée (à la limite). Comme l'inégalité suivante est clairement vérifiée avec la définition de $\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \forall (\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}}), \\ \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \mathbf{E}^n) \right\|_{\mathcal{K}}^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \leq \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z})^2, \end{aligned} \quad (2.58)$$

le résultat vient en choisissant $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \Pi^{n+1}(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})|_{\mathcal{K}}$.

Montrons maintenant (\mathcal{C}_1) . Soit $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ une cellule de référence donnée, et soit $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in (V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}} \times V_h^{n+1}|_{\mathcal{K}})$. En utilisant la formule (2.45) et le maillage $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$ vu dans la définition 2.23, il vient

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}^n(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} \\ \mathcal{G} \subset \mathcal{K}}} \frac{a_{\mathcal{G}}(\varepsilon \mathbf{w}, \mathbf{w}) + a_{\mathcal{G}}(\mu \mathbf{z}, \mathbf{z}) - a_{\mathcal{G}}(\varepsilon \mathbf{E}^n, \mathbf{E}^n) - a_{\mathcal{G}}(\mu \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta t} \\ &+ \sum_{\substack{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}} \\ \mathcal{G} \subset \mathcal{K}}} \left[r_{\mathcal{G}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - r_{\mathcal{G}}(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right] + \sum_{\substack{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1} \\ \mathcal{L} \subset \mathcal{K}}} \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{L}} \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \cdot \llbracket \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \, ds \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n \\ \mathcal{J} \subset \mathcal{K}}} \int_{\partial \mathcal{J}} \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^n \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \cdot \left\{ \left\{ \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right\} \right\}_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \, ds \\ &- \sum_{\substack{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1} \\ \mathcal{L} \subset \mathcal{K}}} \int_{\partial \mathcal{L} \setminus \partial \Omega} \left[\frac{\lambda}{4Z_{\partial \mathcal{L}}} \left(\llbracket \mathbf{w} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \right)^2 + \frac{\lambda}{4Y_{\partial \mathcal{L}}} \left(\llbracket \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \right)^2 \right] ds \\ &+ \sum_{\substack{\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n \\ \mathcal{J} \subset \mathcal{K}}} \int_{\partial \mathcal{J} \setminus \partial \Omega} \left[\frac{\lambda}{4Z_{\partial \mathcal{J}}} \left(\llbracket \mathbf{E}^n \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \right)^2 + \frac{\lambda}{4Y_{\partial \mathcal{J}}} \left(\llbracket \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \right)^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Il s'agit maintenant de borner les termes de (2.59) en considérant plusieurs groupes de termes. En utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)^2 + 2b(a - b)$, il vient pour chaque $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} & |a_{\mathcal{G}}(\varepsilon \mathbf{w}, \mathbf{w}) - a_{\mathcal{G}}(\varepsilon \mathbf{E}^n, \mathbf{E}^n)| + \left| a_{\mathcal{G}}(\mu \mathbf{z}, \mathbf{z}) - a_{\mathcal{G}}(\mu \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right| \\ & \leq \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \mathbf{E}^n) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + 2 \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}^n \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \mathbf{E}^n) \right\|_{\mathcal{G}} \\ & \quad + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + 2 \left\| \mu^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Pour les termes en $r_{\mathcal{G}}$ dans (2.59), une première décomposition mène à

$$\begin{aligned} & \left| r_{\mathcal{G}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - r_{\mathcal{G}}(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right| \\ & = \left| r_{\mathcal{G}}(\mathbf{E}^n, \mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) + r_{\mathcal{G}}(\mathbf{w} - \mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) + r_{\mathcal{G}}(\mathbf{w} - \mathbf{E}^n, \mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right|. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'identité $ab \leq \frac{k}{2}a^2 + \frac{1}{2k}b^2$ et grâce aux propriétés de μ (1.7), nous avons :

$$\begin{aligned} & \left| r_{\mathcal{G}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - r_{\mathcal{G}}(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right| \\ & \leq \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}} \left(\frac{\Delta t}{4} \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \nabla \times (\mathbf{w} - \mathbf{E}^n) \right\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{\Delta t} \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \nabla \times \mathbf{E}^n \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{G}} + \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \nabla \times (\mathbf{w} - \mathbf{E}^n) \right\|_{\mathcal{G}} \left\| \mu^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{G}} \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Enfin, nous traitons les termes de bord en (2.59). Tous ces termes peuvent être réécrits sous une seule somme utilisant la définition de $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$, en faisant les mêmes considérations que sur le système 1D : soit $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$ une cellule donnée et soient $\mathcal{L} \in \mathcal{T}_h^{n+1}$ et $\mathcal{J} \in \mathcal{T}_h^n$ les deux cellules telles que $\mathcal{G} = \mathcal{L} \cap \mathcal{J}$. Alors, un bord $\Gamma \in \partial \mathcal{G}$ vérifie

- soit $\Gamma \subset \partial \mathcal{L}$ et $\Gamma \subset \partial \mathcal{J}$ alors les sauts et moyennes des inconnues sont déjà présents dans (2.59),
- soit $\Gamma \subset \partial \mathcal{L}$ et $\Gamma \not\subset \partial \mathcal{J}$ et donc, quand \mathbf{E}^n et $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$ appartiennent à $Q_{r_{\mathcal{J}}}(\mathcal{J})$ avec $\Gamma \subset \mathcal{J} \setminus \partial \mathcal{J}$ il vient $\llbracket \mathbf{E}^n \times \mathbf{n} \rrbracket_{\Gamma}^{\mathcal{G}} = \llbracket \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\Gamma}^{\mathcal{G}} = 0$,
- soit enfin $\Gamma \not\subset \partial \mathcal{L}$ et $\Gamma \subset \partial \mathcal{J}$ qui implique que $\llbracket \mathbf{w} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\Gamma}^{\mathcal{G}} = \llbracket \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\Gamma}^{\mathcal{G}} = 0$.

Ainsi, les termes de bord dans (2.59) se réécrivent comme une somme sur chaque sous-élément de l'intersection des espaces d'approximation :

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{G} \subset \mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{G}} \frac{1}{2} \left(\llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial \mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \cdot \llbracket \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \, ds \right. \\ & \quad \left. - \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^n \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial \mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \cdot \left\{ \left\{ \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right\} \right\}_{\partial \mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \right) \, ds \\ & - \sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{G} \subset \mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{G} \setminus \partial \Omega} \left(\frac{\lambda}{4Z_{\partial \mathcal{G}}} \left[\left(\llbracket \mathbf{w} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \right)^2 - \left(\llbracket \mathbf{E}^n \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \right)^2 \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda}{4Y_{\partial \mathcal{G}}} \left[\left(\llbracket \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \right)^2 - \left(\llbracket \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \right)^2 \right] \right) \, ds. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Maintenant, prenons $\Gamma \in \partial\mathcal{G}$. Avec les relations $Z_\Gamma = 1/Y_\Gamma$ et $a^2 - b^2 = (a - b)^2 + 2b(a - b)$, le terme correspondant dans (2.62), qu'on notera \mathcal{B}_Γ , vérifie

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Gamma &\leq \frac{1}{2} \left| \int_\Gamma \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^n \times \mathbf{n}) \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} \cdot \left\{ \left(\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \times \mathbf{n} \right\}_\Gamma^\mathcal{G} ds \right| \\ &+ \frac{1}{2} \left\| \llbracket \mathbf{n} \times ((\mathbf{w} - \mathbf{E}^n) \times \mathbf{n}) \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \cdot \left[\left\| \left\{ \left(\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \times \mathbf{n} \right\}_\Gamma^\mathcal{G} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + \left\| \left\{ \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right\}_\Gamma^\mathcal{G} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right] \\ &+ \int_{\Gamma \setminus \partial\Omega} \left[\frac{\lambda}{4Z_\Gamma} \left(\llbracket (\mathbf{w} - \mathbf{E}^n) \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} \right)^2 + \frac{\lambda}{4Y_\Gamma} \left(\left\{ \left(\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \times \mathbf{n} \right\}_\Gamma^\mathcal{G} \right)^2 \right] ds \\ &+ \left| \int_{\Gamma \setminus \partial\Omega} \frac{\lambda}{2Y_\Gamma} \left\{ \left(\mathbf{z} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \times \mathbf{n} \right\}_\Gamma^\mathcal{G} \cdot \left\{ \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right\}_\Gamma^\mathcal{G} ds \right| \\ &+ \left| \int_{\Gamma \setminus \partial\Omega} \frac{\lambda}{2Z_\Gamma} \llbracket (\mathbf{w} - \mathbf{E}^n) \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} \cdot \llbracket \mathbf{E}^n \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} ds \right|. \end{aligned}$$

Nous allons utiliser le lemme 2.29 afin de majorer tous ces termes de bord par des normes volumiques des inconnues. Ces inconnues sont des éléments de V_h^n, V_h^{n+1} ou des différences de tels et prises sur des cellules de $\mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$. Elles doivent donc être vues comme des éléments de $V_h^{n+\frac{1}{2}}$. Ainsi, sous la condition CFL correspondant à l'espace $V_h^{n+\frac{1}{2}}$ nous allons pouvoir exploiter les résultats du lemme 2.29. A partir de (2.56a) et (2.56b), on en déduit les relations suivantes

$$\int_\Gamma \frac{\Delta t}{2Z_\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} \cdot \llbracket \mathbf{u} \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} ds \leq C \left(\mathcal{N}_\varepsilon^\mathcal{G}(\mathbf{u})^2 + \mathcal{N}_\varepsilon^{\mathcal{G}'}(\mathbf{u})^2 \right), \quad (2.63a)$$

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \frac{\Delta t}{2Z_\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} \cdot \llbracket \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} ds \\ &\leq C \left(\mathcal{N}_\varepsilon^\mathcal{G}(\mathbf{u})\mathcal{N}_\varepsilon^\mathcal{G}(\mathbf{v}) + \mathcal{N}_\varepsilon^\mathcal{G}(\mathbf{u})\mathcal{N}_\varepsilon^{\mathcal{G}'}(\mathbf{v}) + \mathcal{N}_\varepsilon^{\mathcal{G}'}(\mathbf{u})\mathcal{N}_\varepsilon^\mathcal{G}(\mathbf{v}) + \mathcal{N}_\varepsilon^{\mathcal{G}'}(\mathbf{u})\mathcal{N}_\varepsilon^{\mathcal{G}'}(\mathbf{v}) \right), \end{aligned} \quad (2.63b)$$

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \frac{\Delta t}{2Y_\Gamma} \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} \cdot \llbracket \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} ds \\ &\leq C \left(\mathcal{N}_\mu^\mathcal{G}(\mathbf{u})\mathcal{N}_\varepsilon^\mathcal{G}(\mathbf{v}) + \mathcal{N}_\mu^\mathcal{G}(\mathbf{u})\mathcal{N}_\varepsilon^{\mathcal{G}'}(\mathbf{v}) + \mathcal{N}_\mu^{\mathcal{G}'}(\mathbf{u})\mathcal{N}_\varepsilon^\mathcal{G}(\mathbf{v}) + \mathcal{N}_\mu^{\mathcal{G}'}(\mathbf{u})\mathcal{N}_\varepsilon^{\mathcal{G}'}(\mathbf{v}) \right), \end{aligned} \quad (2.63c)$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de $h_\mathcal{K}$, $r_\mathcal{K}$ et Δt . Des résultats équivalents aux équations (2.63a) et (2.63b) peuvent être obtenus pour les termes $\int_\Gamma \frac{\Delta t}{2Y_\Gamma} (\llbracket \mathbf{u} \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G})^2 ds$ et $\int_\Gamma \frac{\Delta t}{2Y_\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} \cdot \llbracket \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma^\mathcal{G} ds$ avec les normes \mathcal{N}_μ . En appliquant les relations (2.63a)-(2.63b)-(2.63c) à la majoration de \mathcal{B}_Γ précédente, puis en reportant dans (2.62) on obtient :

$$\sum_{\Gamma \in \partial\mathcal{G}, \mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}} \mathcal{B}_\Gamma \leq (2\lambda + 1)C \left[2\Phi_\mathcal{K}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z})^2 + \Phi_\mathcal{K}^{n+1}(0, 0)\Phi_\mathcal{K}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \right]. \quad (2.64)$$

En combinant les résultats (2.60), (2.61) et (2.64), il vient finalement

$$\begin{aligned} &\Delta t \left| \widetilde{\mathcal{F}_\mathcal{K}^{n+1}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - \widetilde{\mathcal{F}_\mathcal{K}^n}(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right| \\ &\leq 4(1 + \lambda)C \left[\Phi_\mathcal{K}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z})^2 + \Phi_\mathcal{K}^{n+1}(0, 0)\Phi_\mathcal{K}^{n+1}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \right]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Il suffit alors de prendre $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \Pi^{n+1} \left(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\mathcal{K}}$ afin d'assurer que la condition (\mathcal{C}_1) soit satisfaite quand $(\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1} \circ \Pi^{n+1}) (\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ tend vers 0. ■

2.4.3.2 Contrôle *a posteriori* de l'erreur d'interpolation 3D

De la démonstration du théorème 2.16, nous pouvons extraire des informations supplémentaires fournissant un contrôle *a posteriori* local sur le respect des conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) :

Corollaire 2.30 (Estimation *a posteriori* sur Π^{n+1}) *Sous les hypothèses du théorème 2.16, notons $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) := \Pi^{n+1} (\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1} := \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1} (\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ le résidu de la construction de l'opérateur d'interpolation Π^{n+1} sur la cellule de référence \mathcal{K} . Alors, pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, il vient*

$$\left| \widetilde{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^{n+1}} (\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) - \widetilde{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n} (\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right| \leq \frac{4(1+\lambda)C}{\Delta t} \left[(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1})^2 + \Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}(0,0) \mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1} \right], \quad (2.66)$$

avec $C > 0$, une constante indépendante de $h_{\mathcal{K}}$, $r_{\mathcal{K}}$ et Δt . De plus, si Δt vérifie la condition CFL (1.25) sur l'espace $V_h^{n+\frac{1}{2}}$, alors

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1})^2 \geq \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\check{\mathbf{E}}^n - \mathbf{E}^n) \right\|_{\mathcal{K}}^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \geq \frac{1}{2} (\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{n+1})^2. \quad (2.67)$$

Preuve. L'inégalité (2.66) est obtenue en calculant (2.65) au point $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$. Il reste à prouver (2.67). La première partie de l'inégalité vient directement de la définition de $\Phi_{\mathcal{K}}^{n+1}$ par (2.58). Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}$ une cellule donnée. Alors, pour tout $\mathbf{s} \in V_h^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{\mathcal{G}}$ nous avons

$$\left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \nabla \times \mathbf{s} \right\|_{\mathcal{G}}^2 \leq \frac{\lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}_{r_{\mathcal{G}}}} \widehat{\mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}}^{-\frac{1}{2}} \right)}{\mu_{\min} \varepsilon_{\max}} \left\| \mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}^{\frac{1}{2}} S_{\mathcal{G}} \right\|_{\mathcal{G}}^2 \leq \frac{c_{\max}^2 \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}_{r_{\mathcal{G}}}} \widehat{\mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}}^{-\frac{1}{2}} \right)}{h_{\mathcal{G}}^2} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{s} \right\|_{\mathcal{G}}^2,$$

avec les notations du théorème 1.10. Ainsi, il vient

$$\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(\mathbf{s})^2 \leq \left(1 + \frac{\Delta t^2 c_{\max}^2 \lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}_{r_{\mathcal{G}}}} \widehat{\mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}}^{-\frac{1}{2}} \right)}{4h_{\mathcal{G}}^2} \right) \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{s} \right\|_{\mathcal{G}}^2.$$

Enfin, si Δt vérifie la condition CFL (1.25) sur $V_h^{n+\frac{1}{2}}$, nous avons l'estimation $c_{\max} \Delta t < \max_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}_h^{n+\frac{1}{2}}} \frac{2h_{\mathcal{G}}}{\sqrt{\lambda_{\max} \left(\widehat{\mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{R}_{r_{\mathcal{G}}}} \widehat{\mathcal{M}_{r_{\mathcal{G}}}}^{-\frac{1}{2}} \right)}}$, et donc $\mathcal{N}_{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(\mathbf{s})^2 \leq 2 \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{s} \right\|_{\mathcal{G}}^2$. De même, il vient aussi $\mathcal{N}_{\mu}^{\mathcal{G}}(\mathbf{r})^2 \leq$

$2 \left\| \mu^{\frac{1}{2}} \mathbf{r} \right\|_{\mathcal{G}}^2$. En sommant ces deux relations pour $(\mathbf{s}, \mathbf{r}) := (\check{\mathbf{E}}^n - \mathbf{E}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$, nous pouvons conclure. ■

Pour résumer, nous avons montré que Π^{n+1} est un opérateur d'interpolation à valeur initiale convenable, dans le sens où si le résidu de l'interpolation est très petit, il satisfait les deux conditions (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) et permet de récupérer une forme de consistance du calcul. De plus, le corollaire 2.30 donne une estimation *a posteriori* sur cette étape d'interpolation grâce aux valeurs de $\Phi^{n+1} \circ \Pi^{n+1}$. En effet, la relation (2.66) donne une borne supérieure sur l'erreur commise sur la stabilité (condition (\mathcal{C}_1)) et l'équation (2.67) indique, avec la condition CFL, la perte de consistance (condition (\mathcal{C}_2)) par le passage de V_h^n à V_h^{n+1} .

2.4.4 Bilan et réflexions sur la stabilité du schéma dans le cas adaptatif

Dans un premier temps, à l'aide des exemples 1D présentés dans la section 2.1.2, nous avons mis en évidence un problème d'instabilité pouvant apparaître dans l'utilisation d'espaces d'approximation évolutifs (ie : changeant au cours du calcul). Même si ces exemples sont réalisés en imposant *a priori* le choix des espaces, la problématique introduite correspond à un point dur dans la mise-en-oeuvre de méthodes GD auto-adaptatives.

Nous avons alors pu montrer que, aussi bien pour le schéma GD1D que pour le schéma GD3D, l'utilisation d'espaces d'approximation adaptatifs introduisait des termes supplémentaires liés à la projection de la condition initiale dans le bilan d'énergie qui étaient *a priori* non-signés même sous la contrainte CFL minimale pour la prise en compte des espaces successifs. Les opérateurs d'interpolation de condition initiale que nous avons proposés pour ces deux schémas nous ont alors permis de démontrer des résultats de « quasi-stabilité », c'est-à-dire permettant de retrouver asymptotiquement la condition de stabilité sur le schéma évolutif. Nous n'avons par contre pas de résultat complet de stabilité dans ce cas. Toutefois, ces résultats visent à nous approcher au mieux d'un comportement stable du schéma GD évolutif.

Par ailleurs, les théorèmes de quasi-stabilité proposent une condition CFL pour le calcul à l'itération $n + 1$ (sur l'espace V_h^{n+1}) en fonction de l'espace utilisé à l'itération n (V_h^n) donnée comme la condition CFL statique définie sur l'espace $V_h^{n+\frac{1}{2}}$ correspondant au plus petit espace commun (au sens de l'inclusion) entre V_h^n et V_h^{n+1} .

Même si plus restrictive que de choisir le pas de temps minimum entre ceux correspondant à V_h^n et V_h^{n+1} , cette condition CFL est tout de même explicite et peut être calculée comme dans le cas d'un espace statique. Par ailleurs, nous voyons que dans sa définition cette condition CFL ne requiert que la connaissance des espaces d'approximation utilisés pour l'itération de calcul courante et l'itération précédente. Ainsi, il est possible de s'abstenir d'imposer dès le départ une condition de stabilité trop forte (du coup un pas Δt très faible) qui correspondrait à l'espace de maillage le plus fin avec l'ordre le plus élevé envisagé. Il est donc possible de gagner du temps de calcul et de contourner la contrainte de stabilité trop forte en utilisant un pas de temps (non-local) adaptatif.

A titre d'exemple, comme illustré sur la figure 2.14, nous supposons être confrontés à

la séquence d'espaces d'approximation suivante :

- pendant deux pas de temps successifs (avancée $t_0 \rightarrow t_1$ et $t_1 \rightarrow t_2$) nous utilisons un espace d'approximation $V_h^1 = V_h^2 = W^1$ donné,
- au troisième pas de temps (avancée $t_2 \rightarrow t_3$) nous utilisons un nouvel espace $V_h^3 = W^2$,
- enfin à partir du troisième temps ($t_3 \rightarrow t_4 \dots$) nous continuons les calculs sur $V_h^4 = \dots = W^2$.

En suivant le résultat du théorème 2.28, nous en déduisons les conditions CFL suivantes :

- $\Delta t_{t_0 \rightarrow t_1} = \Delta t_1$: condition CFL sur $V_h^1 = W^1$,
- $\Delta t_{t_1 \rightarrow t_2} = \Delta t_1$, ce qui correspond à la fois à la condition CFL dans le cas d'une approximation statique n'utilisant que l'espace W^1 , et à la valeur de la CFL sur l'espace $V_h^{\frac{3}{2}}$ ($= W^1$ ici) dans le cas du théorème 2.28,
- $\Delta t_{t_2 \rightarrow t_3} = \Delta t_{12} \leq \min(\Delta t_1, \Delta t_2)$ qui correspond à la condition CFL sur l'espace $V_h^{\frac{5}{2}}$ le plus petit espace contenant W^1 et W^2 ,
- $\Delta t_{t_3 \rightarrow t_4} = \Delta t_2$ qui correspond à nouveau à la fois à la CFL sur l'espace statique W^2 et à la CFL du théorème 2.28 sur l'espace $V_h^{\frac{7}{2}}$ ($= W^2$ ici).

Nous voyons donc sur cet exemple que le pas de temps est évolutif au cours du calcul et qu'il est choisi optimal pour les itérations $t_0 \rightarrow t_1$, $t_1 \rightarrow t_2$ et $t_3 \rightarrow t_4$. Il n'y a de restriction sur le pas de temps qu'au niveau du changement d'espace (itération $t_2 \rightarrow t_3$).

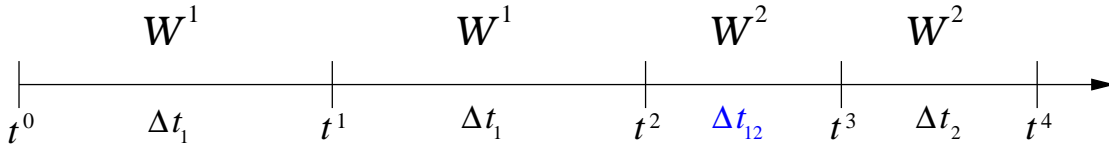


FIGURE 2.14: Exemple d'évolution de l'approximation au cours du calcul sur maillage statique.

Si maintenant nous nous plaçons dans une perspective de raffinement auto-adaptatif, comme nous le verrons dans le chapitre 4, le changement d'espace d'approximation est alors guidé par une quantité (l'estimateur *a posteriori*) qui permet d'évaluer le meilleur choix de l'espace à utiliser pour effectuer une itération donnée du calcul afin de réduire les erreurs numériques à cette étape en optimisant les coûts. Toutefois, cette estimation d'erreur ne calcule *a priori* que l'information du gain potentiel de précision que fourniraient des raffinements locaux (en h et/ou en p) durant le calcul de l'étape. La définition de l'espace d'approximation avec ces raffinements est alors *a priori* différente de celle de l'espace d'approximation utilisé à l'étape précédente. Il faut donc effectuer l'interpolation de la solution obtenue à l'étape précédente sur l'espace utilisé pour l'itération courante. Or, comme nous l'avons vu, cette opération introduit une erreur numérique pouvant s'avérer conséquente.

Dans le cas où nous utilisons l'opérateur d'interpolation de condition initiale 1D (de la définition 2.11) ou 3D (de la définition 2.23), nous pouvons évaluer à l'aide du résidu avec les corollaires 2.19 et 2.30 l'erreur commise. Il est alors possible de dire si le calcul sur le nouvel espace d'approximation est inutile dans le cas où on constaterait que l'erreur d'interpolation de condition initiale serait trop importante au vu de la précision recherchée.

Utilisation d'espaces d'approximation non-conformes

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux utilisations d'espaces d'approximation non-conformes pour le schéma GD3D. Par espace non-conforme nous entendons la présence soit de maillages non-conformes au sens éléments finis (non-conformité en h), soit d'ordres différents entre les cellules (non-conformité en p), soit les deux (non-conformité hp). Ce type d'espace est en particulier intéressant pour la mise en place d'une stratégie de raffinements/déraffinements (en h et/ou en p) auto-adaptative car il permet d'introduire des modifications locales de l'espace d'approximation au cours du calcul.

Dans une première partie, nous allons donc présenter les méthodes mises en oeuvre pour l'utilisation d'espaces d'approximation non-conformes. Nous allons en particulier expliciter les modifications effectuées pour permettre la prise en compte de non-conformités en p et en h . Sur le schéma Galerkin discontinu, ces modifications peuvent être localisées dans le traitement des termes de flux au niveau des interfaces entre deux zones d'approximations différentes. Nous détaillons ainsi la façon dont sont calculés les termes de trace sur ces interfaces.

Nous montrons alors dans la seconde partie de ce chapitre, sur un exemple numérique, qu'il est possible d'introduire une détérioration locale de la solution par utilisation d'espaces non-conformes. Cette détérioration est vue comme l'apparition d'ondes parasites sur la solution calculée par rapport aux résultats obtenus sur un espace d'approximation conforme. Ceci pose donc la question du choix de la méthode pour gérer les non-conformités h ou p dans le schéma Galerkin discontinu. Nous proposons ainsi une méthode de « correction » permettant d'utiliser le calcul précédent sur l'espace non-conforme et d'en déduire une solution vivant dans un espace conforme. Cette méthode présente alors l'intérêt d'obtenir une solution sur espace conforme, donc éventuellement de « filtrer » les ondes parasites, mais sans perdre les bonnes propriétés du schéma GD3D (facilité d'implémentation et coûts calculs réduits).

La dernière partie de ce chapitre présente la construction de cette méthode de correction. Pour simplifier le traitement, comme il apparaît en utilisant un schéma de type Galerkin discontinu que ces phénomènes proviennent d'une discontinuité de maillage et/ou de degré d'approximation polynomiale à l'interface entre les cellules des différentes zones, le rôle du calcul des termes de traces sur cette interface est primordial. Il est alors intéressant d'utiliser un schéma permettant d'accéder « facilement » à cette information et de manière aussi indépendante que possible des autres inconnues. Nous allons donc utiliser, pour expliciter la méthode de traitement proposée, un schéma Galerkin discontinu utilisant des fonctions de base de Gauss-Lobatto sur le modèle simplifié des équations de Maxwell en 2D. Après avoir rapidement introduit ce schéma et montré sur un exemple qu'il présente le même type de problèmes, nous détaillons les calculs des différents termes de la méthode de correction.

3.1 Méthodes pour l'utilisation d'espaces d'approximation non-conforme

Dans cette section, nous allons présenter des travaux menés dans le cadre de l'amélioration des performances de notre approche GD, pour la prise en compte d'espaces non-conformes en p puis en h . Le cas d'une non-conformité hp s'obtient par combinaison des deux constructions présentées ici. Nous terminons par la présentation de quelques intérêts pour l'utilisation de ces espaces indépendamment de l'étude de raffinements auto-adaptatifs.

3.1.1 Modification du schéma pour la non-conformité en p

En revenant à la construction du schéma GD3D (1.21) (voir section 1.2.2), il est facile de voir que les matrices de masse ($M_{\bar{\varepsilon}}$ et $M_{\bar{\mu}}$) et de rigidité (R) sont construites localement sur chaque élément $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$. Dans le cas où nous utilisons un espace d'approximation V_h avec des ordres différents sur les cellules, elles ne sont donc pas affectées par le changement d'ordre entre cellules dans le sens où modifier l'ordre sur une seule cellule n'implique de recalculer les matrices de masse et de rigidité des autres cellules.

Concernant les matrices de sauts sur les frontières internes du maillage \mathcal{T}_h (S_c^θ et S_d^θ), l'affectation d'ordres différents sur des cellules voisines va entraîner des modifications majeures. Ces modifications ont pour origines les formules de quadrature de Gauss que nous voulons exactes pour le calcul des termes de sauts aux interfaces. Nous explicitons donc ces calculs dans le cas de deux cellules adjacentes \mathcal{K} et \mathcal{K}' , de frontière commune Γ , telles que les ordres polynomiaux vérifient $r_{\mathcal{K}} > r_{\mathcal{K}'}$.

Pour des fonctions $(\phi_{1|\mathcal{K}}, \phi_{2|\mathcal{K}}) \in (\mathcal{B}_h^{3D})^2$ à support sur \mathcal{K} donné, par produits scalaires des vecteurs des coordonnées de $\phi_{1|\mathcal{K}}$ et $\phi_{2|\mathcal{K}}$ dans \mathcal{B}_h^{3D} avec respectivement la première et la seconde équation de (1.21), nous pouvons définir les termes de la matrice de saut sur \mathcal{K}

associés aux fonctions $\phi_{1|\mathcal{K}}, \phi_{2|\mathcal{K}}, S_{\mathbf{E},\mathcal{K}}^{n+1}$ et $S_{\mathbf{H},\mathcal{K}}^{n+1}$ par :

$$S_{\mathbf{E},\mathcal{K}}^{n+1} := \left(S_{\mathbf{d}}^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{E}^n \right) \Big|_{\mathcal{K}} + \left(S_{\mathbf{c}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\mathcal{K}}, \quad (3.1a)$$

$$S_{\mathbf{H},\mathcal{K}}^{n+1} := \left(S_{\mathbf{d}}^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\mathcal{K}} + \left(S_{\mathbf{c}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}^{n+1} \right) \Big|_{\mathcal{K}}. \quad (3.1b)$$

Les écritures de ces termes étant complètement similaires, nous nous contentons de détailler le traitement de (3.1b), et donc le calcul des termes :

$$\left(S_{\mathbf{d}}^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{H} \right) \Big|_{\mathcal{K}} =: \sum_{i=1}^6 \left(S_{\mathbf{d}}^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{H} \right) \Big|_{\mathcal{K},\Gamma_i} \quad \text{et} \quad \left(S_{\mathbf{c}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right) \Big|_{\mathcal{K}} =: \sum_{i=1}^6 \left(S_{\mathbf{c}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right) \Big|_{\mathcal{K},\Gamma_i},$$

où la dépendance en n est ignorée pour alléger les notations car sans incidence, $\partial\mathcal{K} = \cup_{i=1}^6 \Gamma_i$ et $\left(S_{\mathbf{d}}^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{H} \right) \Big|_{\mathcal{K},\Gamma_i}$ indique que l'on considère uniquement la partie de $\left(S_{\mathbf{d}}^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{H} \right) \Big|_{\mathcal{K}}$ calculée par intégration sur Γ_i ; de même pour $\left(S_{\mathbf{c}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right) \Big|_{\mathcal{K},\Gamma_i}$. Par les formules (1.20a) et (1.20b), nous pouvons réécrire les termes portés sur $\Gamma = \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}'$ sous la forme

$$\left(S_{\mathbf{c}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right) \Big|_{\mathcal{K},\Gamma} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma}^G ((\mathbf{E}_{|\mathcal{K}'} - \mathbf{E}_{|\mathcal{K}}) \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}} \, ds, \quad (3.2a)$$

$$\left(S_{\mathbf{d}}^{\frac{\lambda}{2}} \mathbf{H} \right) \Big|_{\mathcal{K},\Gamma} = \int_{\Gamma}^G \frac{\lambda}{Y} (\mathbf{n}_{\mathcal{K}} \times ((\mathbf{H}_{|\mathcal{K}'} - \mathbf{H}_{|\mathcal{K}}) \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}})) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}} \, ds. \quad (3.2b)$$

où la notation \int_{Γ}^G signifie que l'intégrale est calculée avec la formule de quadrature de Gauss en 2D construite à partir de (1.16) sur Γ . Il apparaît donc quatre termes distincts dans ces équations. Avec $(r+1)$ points de Gauss, ces quadratures sont exactes pour des polynômes d'ordre $(2r+1)$. Il vient alors

- pour $r = r_{\mathcal{K}} = \max(r_{\mathcal{K}}, r_{\mathcal{K}'})$, les calculs des intégrales des termes en $\mathbf{E}_{|\mathcal{K}}$ et $\mathbf{H}_{|\mathcal{K}}$ (qui sont des polynômes de degré $2r_{\mathcal{K}} < 2r+1$ à intégrer), $\mathbf{E}_{|\mathcal{K}'}$ et $\mathbf{H}_{|\mathcal{K}'}$ (qui sont des polynômes de degré $r_{\mathcal{K}} + r_{\mathcal{K}'} < 2r+1$) sont toutes exactes,
- pour $r = r_{\mathcal{K}'} < \max(r_{\mathcal{K}}, r_{\mathcal{K}'})$, les calculs des intégrales des termes en $\mathbf{E}_{|\mathcal{K}'}$ et $\mathbf{H}_{|\mathcal{K}'}$ sont exactes, mais pas pour les termes $\mathbf{E}_{|\mathcal{K}}$ et $\mathbf{H}_{|\mathcal{K}}$ (polynômes de degré $2r_{\mathcal{K}} > 2r_{\mathcal{K}'} + 1$).

Nous devons donc utiliser, dans tous ces calculs la formule de quadrature de degré $r = r_{\mathcal{K}}$.

Ce choix des points de Gauss pour le calcul des intégrales approchées engendre une dissymétrie dans les formules de sauts. On obtient alors

$$\begin{aligned} \left(S_{\mathbf{c}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right) \Big|_{\mathcal{K},\Gamma} = & -\frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn}(J_{\mathcal{K}'}) N_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}} \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k,m,n=1}^{r'+1} \widehat{E}_{kmn}^j \widehat{\varphi}_{l_{kmn}}(\widehat{x}_{abc}) \right) (\vec{e}_j' \times \widehat{\mathbf{n}}') \right. \\ & \left. + \operatorname{sgn}(J_{\mathcal{K}}) \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{r+1} \widehat{E}_{kbc}^j \widehat{\varphi}_{kbc}(\widehat{x}_{abc}) \right) (\vec{e}_j \times \widehat{\mathbf{n}}) \right] \cdot \widehat{\varphi}_{l_{bcb}}(\widehat{x}_{abc}) \omega_{l_b} \omega_{l_c} \vec{e}_i', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(S_c^{\frac{\lambda}{Y}} \mathbf{H} \right) \Big|_{\mathcal{K}, \Gamma} = & -\frac{\lambda}{Y} \left[\text{sgn}(J_{\mathcal{K}'} J_{\mathcal{K}}) N_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}} \sum_{j=1}^3 \left(D_{\mathcal{K}'} \sum_{k,m,n=1}^{r'+1} \widehat{H}_{kmn}^j \widehat{\varphi}'_{l_{kmn}}(\widehat{x}_{abc}) \right) (\vec{e}_j' \times \widehat{\mathbf{n}}') \times (-\widehat{\mathbf{n}}') \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^3 \left(D_{\mathcal{K}} \sum_{k=1}^{r+1} \widehat{H}_{kbc}^j \widehat{\varphi}_{l_{kbc}}(\widehat{x}_{abc}) \right) (\vec{e}_j \times \widehat{\mathbf{n}}) \times (-\widehat{\mathbf{n}}) \right] \cdot \widehat{\varphi}_{l_{tbc}}(\widehat{x}_{abc}) \omega_{l_b} \omega_{l_c} \vec{e}_i', \end{aligned}$$

où $N_{\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}}$ est la matrice unitaire introduite dans la preuve du théorème 1.10 donnant le lien entre les degrés de liberté des traces tangentes des fonctions de base sur \mathcal{K} et \mathcal{K}' , et

$$D_{\mathcal{K}} = \frac{DF_{\mathcal{K}}^* DF_{\mathcal{K}}}{|J_{\mathcal{K}}| \| (DF_{\mathcal{K}}^*)^{-1} \widehat{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}} \|}.$$

En suivant le même raisonnement, pour les fonctions $(\phi_{1|\mathcal{K}'}, \phi_{2|\mathcal{K}'}) \in (\mathcal{B}_h^{3D})^2$ à support dans \mathcal{K}' on en déduit les termes de flux sur Γ intervenant dans le calcul pour la cellule \mathcal{K}' :

$$\begin{aligned} \left(S_c^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right) \Big|_{\mathcal{K}', \Gamma} = & -\frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{r+1} \widehat{\varphi}'_{l_{t'b'c'}}(\widehat{x}_{abc}) \omega_{l_b} \omega_{l_c} \text{sgn}(J_{\mathcal{K}}) N_{\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{r+1} \widehat{E}_{kbc}^j \widehat{\varphi}_{l_{kbc}}(\widehat{x}_{abc}) (\vec{e}_j \times \widehat{\mathbf{n}}) \cdot \vec{e}_i' \\ & + \widehat{\varphi}'_{l_{t'b'c'}}(\widehat{x}_{a'b'c'}) \omega_{l_{b'}} \omega_{l_{c'}} \text{sgn}(J_{\mathcal{K}'}) \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{r'+1} \widehat{E}_{kb'c'}^j \widehat{\varphi}'_{l_{kb'c'}}(\widehat{x}_{a'b'c'}) \right) (\vec{e}_j' \times \widehat{\mathbf{n}}') \cdot \vec{e}_i', \\ \left(S_c^{\frac{\lambda}{Y}} \mathbf{H} \right) \Big|_{\mathcal{K}', \Gamma} = & -\frac{\lambda}{Y} \sum_{b,c=1}^{r+1} \widehat{\varphi}'_{l_{t'b'c'}}(\widehat{x}_{abc}) \omega_{l_b} \omega_{l_c} \\ & \left(\text{sgn}(J_{\mathcal{K}} J_{\mathcal{K}'}) N_{\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'} \sum_{j=1}^3 D_{\mathcal{K}} \sum_{k=1}^{r+1} \widehat{H}_{kbc}^j \widehat{\varphi}_{l_{kbc}}(\widehat{x}_{abc}) (\vec{e}_j \times \widehat{\mathbf{n}}) \times (-\widehat{\mathbf{n}}) \right. \\ & \left. + \widehat{\varphi}'_{l_{t'b'c'}}(\widehat{x}_{a'b'c'}) \omega_{l_{b'}} \omega_{l_{c'}} \sum_{j=1}^3 D_{\mathcal{K}'} \sum_{k=1}^{r'+1} \widehat{H}_{kb'c'}^j \widehat{\varphi}'_{l_{kb'c'}}(\widehat{x}_{a'b'c'}) (\vec{e}_j' \times \widehat{\mathbf{n}}') \times (-\widehat{\mathbf{n}}') \right) \cdot \vec{e}_i'. \end{aligned}$$

La figure 3.1 représente les projections associées aux premières fonctions de base sur l'interface pour les degrés de libertés locaux sur \mathcal{K} et \mathcal{K}' . Bien que les formules de saut pour des ordres variables soient différentes, nous pouvons noter que le nombre total de projections dans les deux cas est similaire. En nous plaçant sur une cellule \mathcal{K} d'ordre $r_{\mathcal{K}}$ dont la voisine \mathcal{K}' est d'ordre $r_{\mathcal{K}'}$, le nombre de projections est de $(r_{\mathcal{K}} + 1)^3 [(r_{\mathcal{K}} + 1) + (r_{\mathcal{K}'} + 1)^3]$. Sur \mathcal{K}' nous avons $(r_{\mathcal{K}'} + 1)^3 [(r_{\mathcal{K}'} + 1) + (r_{\mathcal{K}} + 1)^3]$ projections. En comparaison, dans la méthode à ordre r fixe nous avons $(r + 1)^3 [(r + 1) + (r + 1)]$.

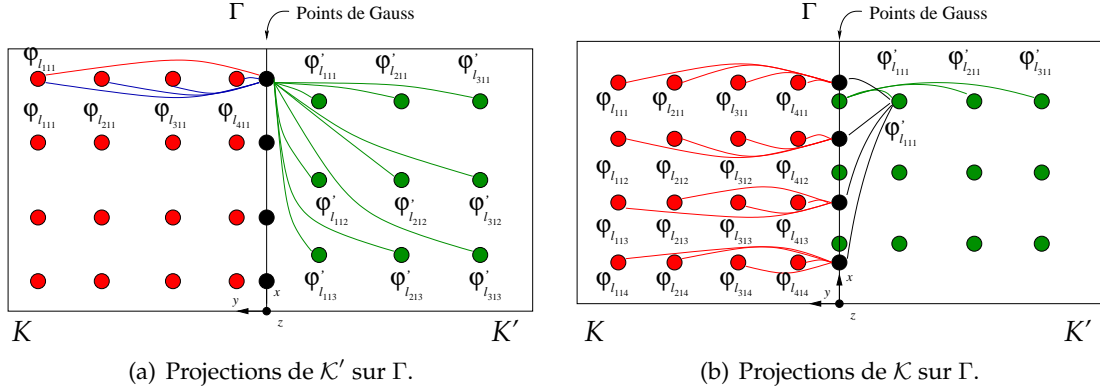


FIGURE 3.1: Inconnues mises en jeu pour le calcul des sauts sur \mathcal{K} au point $(\hat{x}_a, \hat{x}_b, \hat{x}_c)$ pour des ordres différents : $r = 3$ à gauche et $r' = 2$ à droite.

3.1.2 Modification du schéma pour la non-conformité en h

On se place maintenant dans le cas d'une cellule $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ dont un de ses côtés donne sur plusieurs autres cellules. Cela introduit un découpage non-conforme de ce côté. En prenant \mathcal{K}' une de ces cellules adjacentes, on note $\Gamma = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ la frontière commune à ces deux cellules, et qui correspond donc à une partie du côté de \mathcal{K} . L'ordre polynomial, supposé homogène, est noté r .

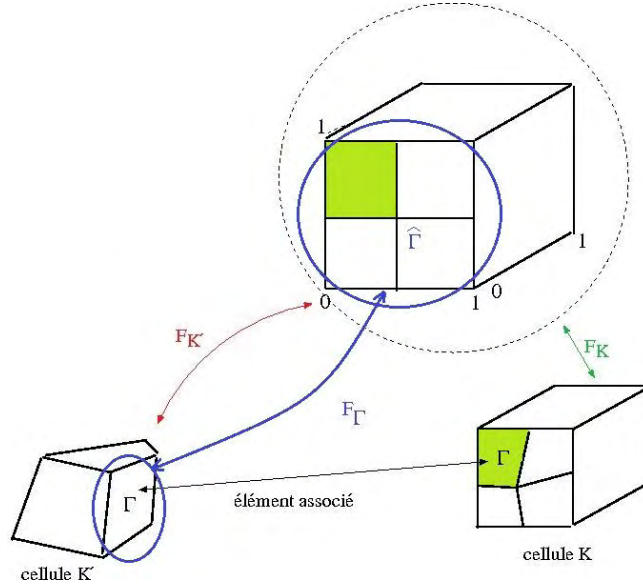


FIGURE 3.2: Transformations bilinéaires utilisées

En utilisant les éléments de transformations entre une cellule quelconque du maillage \mathcal{T}_h et l'élément de référence $\hat{\mathcal{K}}$ introduits dans la section 1.2.2.1, nous pouvons alors définir

le bord de $\widehat{\mathcal{K}}$ correspondant par la transformation $F_{\mathcal{K}'}$ à Γ :

$$\widehat{\Gamma} := F_{\mathcal{K}'}^{-1}(\Gamma).$$

Nous introduisons alors F_{Γ} la transformation bilinéaire envoyant $\widehat{\Gamma}$ sur Γ : $F_{\Gamma} = F_{\mathcal{K}'}|_{\widehat{\Gamma}}$. Ces transformations sont illustrées sur la figure 3.2.

En suivant le même raisonnement que pour le cas des non-conformités en p de la section 3.1.1, nous voyons que le travail pour les termes $\left(S_c^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}\right)\big|_{\mathcal{K},\Gamma}$ et $\left(S_c^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}\right)\big|_{\mathcal{K}',\Gamma}$ se ramène à calculer sur la face Γ les 4 termes liés aux sauts donnés par :

$$\begin{aligned} \left(S_c^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}\right)\big|_{\mathcal{K},\Gamma} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}} \, ds - \int_{\Gamma} (E_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}} \, ds, \\ \left(S_c^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}\right)\big|_{\mathcal{K}',\Gamma} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}'}) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}'} \, ds - \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}'}) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}'} \, ds. \end{aligned}$$

De même pour les termes $\left(S_c^{\frac{\lambda}{Y}} \mathbf{H}\right)\big|_{\mathcal{K},\Gamma}$ et $\left(S_c^{\frac{\lambda}{Y}} \mathbf{H}\right)\big|_{\mathcal{K}',\Gamma}$. Pour effectuer ces intégrales sur Γ vu comme une partie de $\partial\mathcal{K}$, il est alors nécessaire de donner la quadrature correspondante sur $\widehat{\Gamma}$ comme bord de $\widehat{\mathcal{K}}'$. Soient $(\hat{x}_{mn})_{(m,n) \in \{1,\dots,r+1\}^2}$ les points de quadrature pour la formule de Gauss sur $\widehat{\Gamma}$. Les poids associés sont notés ω_{mn} . Nous obtenons finalement la quadrature suivante pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}} \, ds &= \int_{\widehat{\Gamma}} ((\mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}}) \circ F_{\Gamma} \, \|J_{F_{\Gamma}}\| \, ds \\ &= \sum_{m,n=1}^{r+1} \omega_{mn} (\mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \times \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) \circ F_{\Gamma}(\hat{x}_{mn}) \cdot \phi_{2|\mathcal{K}} \circ F_{\Gamma}(\hat{x}_{mn}) \, \|J_{F_{\Gamma}}(\hat{x}_{mn})\|, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{K}'} \circ F_{\Gamma}(\hat{x}_{mn}) &= \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{(r+1)^3} E_{i,\mathcal{K}'}^l DF_{\mathcal{K}'}^{*-1}(\hat{x}_{mn,\mathcal{K}'}^l) \widehat{\varphi}_i^l(\hat{x}_{mn,\mathcal{K}'}^l), \\ \phi_{2|\mathcal{K}} \circ F_{\Gamma}(\hat{x}_{mn}) &= DF_{\mathcal{K}}^{*-1}(\hat{x}_{mn,\mathcal{K}}) \widehat{\varphi}_{i_0}^{l_0}(\hat{x}_{mn,\mathcal{K}}), \\ \mathbf{n}_{\mathcal{K}} \circ F_{\Gamma}(\hat{x}_{mn}) &= \frac{DF_{\mathcal{K}}^{*-1}(\hat{x}_{mn,\mathcal{K}}) \mathbf{n}_{\mathcal{K}}}{\|DF_{\mathcal{K}}^{*-1}(\hat{x}_{mn,\mathcal{K}}) \mathbf{n}_{\mathcal{K}}\|}, \end{aligned}$$

où $\hat{x}_{mn,\mathcal{K}'}$ correspond au point $\hat{x}_{mn} \in \widehat{\Gamma}$ (éventuellement pris dans un système de coordonnées locales) ramené sur $\widehat{\Gamma} \subset \widehat{\mathcal{K}}$ (dans le système de coordonnées de $\widehat{\mathcal{K}}$ correspondant à la transformation de \mathcal{K}' vers $\widehat{\mathcal{K}}$), et (i_0, l_0) est l'indice de la fonction de base $\phi_{2|\mathcal{K}}$ dans \mathcal{B}_h^{3D} .

Les autres termes de sauts se calculent, sans difficultés, de la même manière.

3.1.3 Illustration de l'intérêt des espaces d'approximation non-conformes

Dans cette section nous mettons en avant des exemples de l'intérêt de l'utilisation d'espaces d'approximation non-conformes en p ou en h indépendamment de la perspective de la mise en oeuvre d'une méthode de raffinement adaptatif.

3.1.3.1 Espace non-conforme en p

Pour comprendre l'intérêt de l'utilisation d'une stratégie d'ordres variables, nous rappelons qu'en pratique, notre méthode Galerkin discontinue est utilisée sur des maillages hexaédriques obtenus dans la majeure partie des cas, à partir du découpage de maillages tétraédriques, comme illustré dans la figure 3.3.

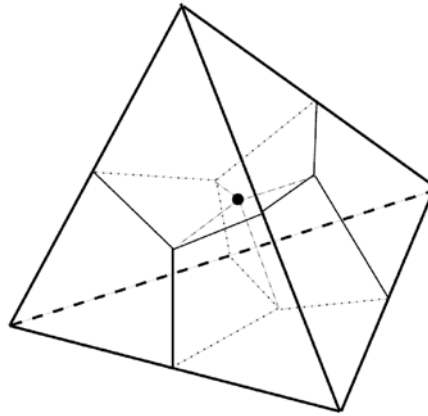


FIGURE 3.3: Découpage d'un tétraédre en quatre hexaèdres.

Dans les calculs qui nous intéressent, nous souhaitons simuler la propagation et la distribution des champs électromagnétiques dans des scènes contenant des objets. Dans ces conditions, le processus de maillage tétraédrique conduit généralement à un maillage plus fin près des parois de ces objets et nous obtenons alors des maillages avec des tailles de cellule très différentes.

Pour une méthode avec ordre fixe, le degré d'approximation spatiale de la solution est déterminé en fonction des plus hautes fréquences utilisées dans la simulation et de la taille de la cellule la plus grande du maillage. L'objectif est d'obtenir une précision suffisante sur les plus grands éléments. Pour des maillages avec une grande disparité de taille de maille, un ordre unique va donc conduire à une sur-approximation des zones maillées finement.

En utilisant des ordres adaptés aux éléments, nous cherchons à améliorer les performances (temps de calcul, stockage mémoire) tout en conservant une bonne précision globale sur la solution. Pour cela, nous cherchons à homogénéiser la précision sur l'ensemble du domaine en diminuant l'ordre sur les petits éléments du maillage.

Par ailleurs, comme on peut l'observer sur la formule de la condition CFL (1.25), le pas de temps Δt diminue lorsque l'ordre (r_K) de la méthode augmente et quand le pas de maillage (Λ_K) diminue. Un avantage de cette stratégie de mixage d'ordres, par rapport à l'utilisation d'un ordre fixe pré-déterminé par les considérations précédentes, est donc l'accroissement de la condition CFL sur les petites cellules en utilisant un ordre plus bas que celui pré-calculé. La diminution locale de l'ordre d'approximation sur les petites cellules permet donc *a priori* un gain significatif sur le temps calcul pour une précision équivalente.

Méthode de choix des ordres d'approximation spatiale

Dans le problème de Maxwell, la source détermine les limites du domaine fréquentiel dans lequel nous cherchons la solution. On peut alors déterminer la borne maximale f_{\max} de ce domaine et calculer la plus petite longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f_{\max}}$ associée à la solution, avec c définissant la vitesse de la lumière dans le milieu. Dans la simulation, afin d'avoir un maillage représentatif du phénomène physique, nous demandons alors à ce que la distance entre deux degrés de liberté (DDL) voisins soit de l'ordre de $\frac{\lambda}{n}$ où n définit un entier, généralement supérieur ou égal à 10. De ce fait, nous pouvons déterminer l'ordre d'approximation des cellules en fonction de la longueur λ en utilisant la formule suivante :

$$r_K = \left\lfloor n \frac{L_K}{\lambda} \right\rfloor,$$

avec n défini comme la précision sur la discrétisation de la longueur d'onde, L_K une longueur caractéristique sur l'élément et $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x .

Remarque 3.1 Dans ce processus, les cellules de taille inférieure à $\frac{\lambda}{n}$ sont toutes affectées à un ordre égal à 1.

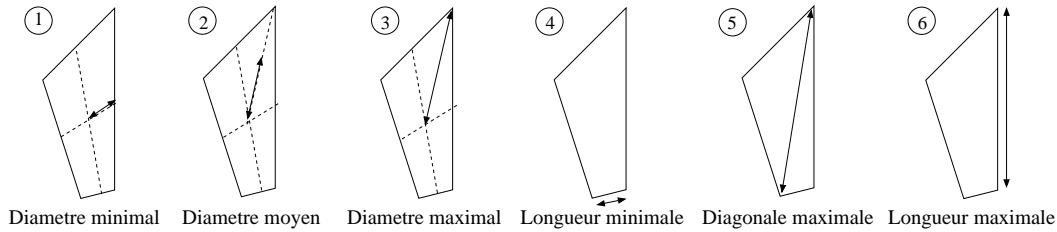


FIGURE 3.4: Options de choix de longueur caractéristique pour les éléments du maillage.

Ce processus d'attribution nécessite une longueur L_K caractérisant la taille des cellules par rapport aux ordres d'approximation utilisés. Différentes stratégies ont été envisagées pour évaluer cette longueur. Les choix testés, comme présentés dans la figure 3.4, ont été :

1. le diamètre de la sphère inscrite à l'élément ;
2. la moyenne entre le diamètre de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite ;
3. le diamètre de la sphère circonscrite à l'élément ;
4. la longueur minimale sur l'élément ;
5. la diagonale maximale sur l'élément ;
6. la longueur maximale sur l'élément.

Pour éviter de sous-évaluer ou sur-évaluer les ordres, nous avons choisi la diagonale maximale ou la moyenne des diamètres qui donnent des résultats similaires.

Illustration de la stratégie

Pour montrer l'avantage de cette stratégie d'approximation d'ordre spatial local par rapport à une méthode avec un ordre fixe, nous proposons de faire des tests de performances sur la diffraction d'une onde plane sur une plaque métallique dans un domaine de calcul de dimensions $3\text{ m} \times 3\text{ m} \times 2\text{ m}$. Nous prenons dans un premier temps un maillage cartésien uniforme sur un domaine de dimension $[0; 3] \times [0; 3] \times [0; 2]$ avec les découpages suivants : $n_x = 3, n_y = 3, n_z = 2$. Ce maillage est référencé par la suite comme maillage *m1*. Le choix de la fréquence maximale (100 MHz) du spectre de cette source est tel que pour une approximation spatiale d'ordre 7, nous obtenons des résultats corrects.

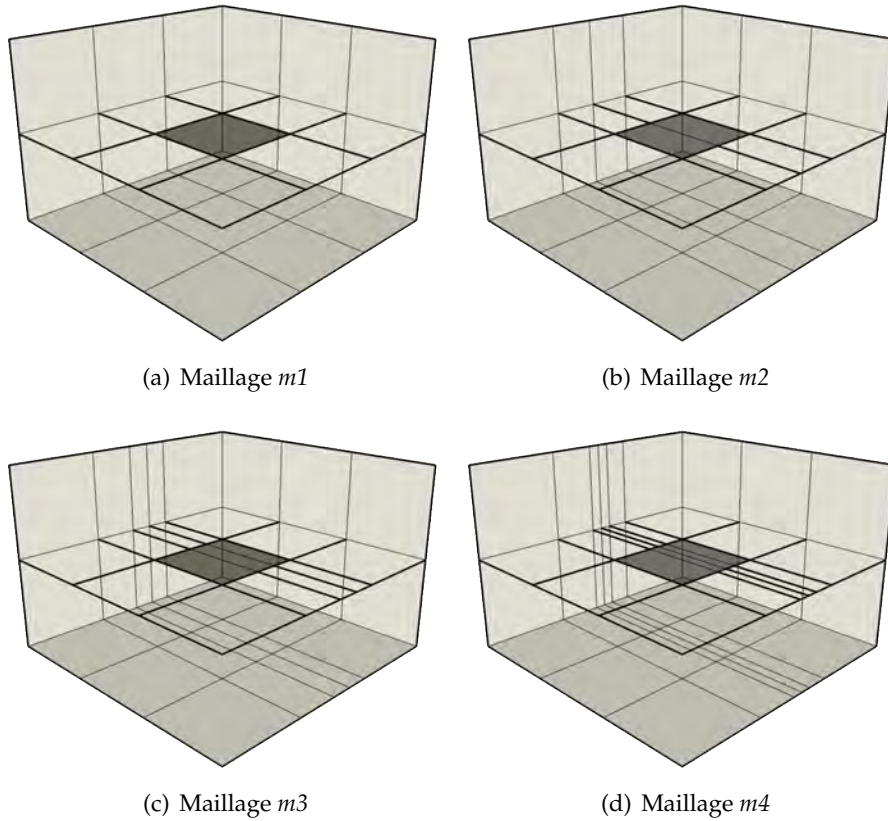


FIGURE 3.5: Maillages-tests pour les performances de calcul de flux non-conformes en ordre.

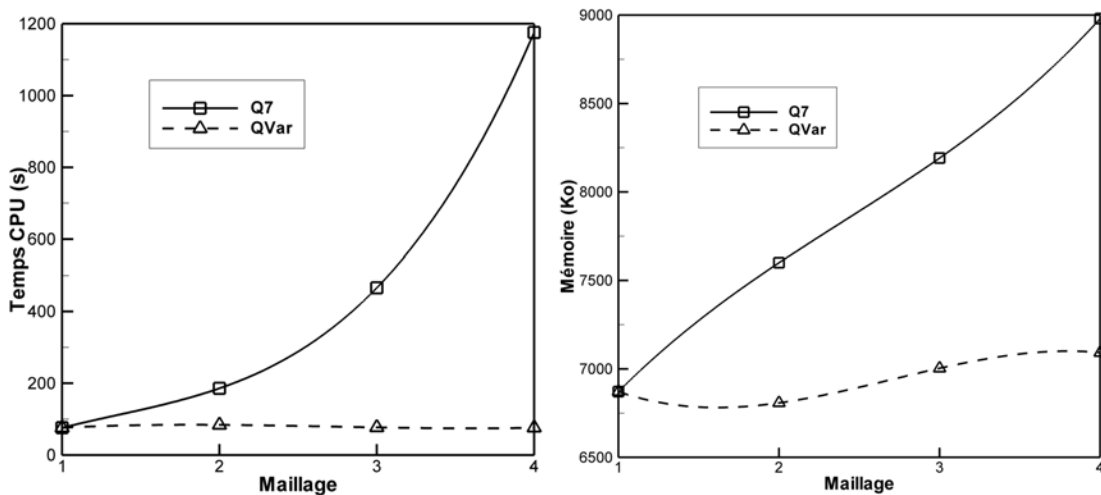
Nous allons ensuite raffiner localement le maillage *m1* dans une direction donnée. Sur chaque nouveau maillage obtenu, *m2*, *m3* et *m4*, présentés dans la figure 3.5, nous effectuons des tests à ordre fixe. Le temps CPU, la place mémoire, le nombre d'itérations ainsi que le nombre de degrés de liberté sont relevés sur le tableau 3.1.

TABLE 3.1: Résultats des tests de performance à ordre fixe.

maillage utilisé :	m1	m2	m3	m4
Temps CPU (s)	76,87	186,48	466,71	1176,9
Mémoire (Kb)	6872	7600	8192	8980
NbIter	3609	7217	14435	28870
DDL	9216	12288	15360	18432

TABLE 3.2: Résultats des tests de performance pour l'utilisation d'ordres variables.

Répartition longueur minimale	m1	m2	m3	m4
Temps CPU (s)	76,87	84,94	77,27	76,49
Mémoire (Kb)	6872	6808	7004	7092
NbIter	3609	3609	3609	3609
DDL	9216	6912	6852	6786



(a) Comparaison de l'évolution du temps CPU en fonction du maillage pour une approximation Q_7 et variable Q_1-Q_7 .
 (b) Comparaison de l'évolution du stockage en fonction du maillage pour une approximation à ordre fixe Q_7 et variable Q_1-Q_7 .

FIGURE 3.6: Comparaison des coûts ordre fixe *vs* ordre variable.

Nous effectuons ensuite une simulation avec des ordres variables utilisant le critère donné précédemment, sur chaque maillage (voir tableau 3.2 et figure 3.6). Nous observons que l'introduction d'approximations d'ordre variable dans les maillages m_2 , m_3 et m_4 permet de réduire le temps de calcul et le stockage en conservant un nombre d'inconnues limité. De plus, en affectant aux cellules les plus petites des ordres d'approximation bas nous obtenons comme prévu un pas de temps élevé. Nous remarquons finalement que, contrairement à l'approche à ordre spatial fixe, l'évolution du temps CPU et du stockage en fonction du maillage restent constants.

3.1.3.2 Maillages non conformes en h

Nous présentons maintenant des exemples de maillages non-conformes en h qui peuvent être intéressants pour les applications GD3D. Nous envisageons plus particulièrement les deux types de configurations illustrés sur la figure 3.7.

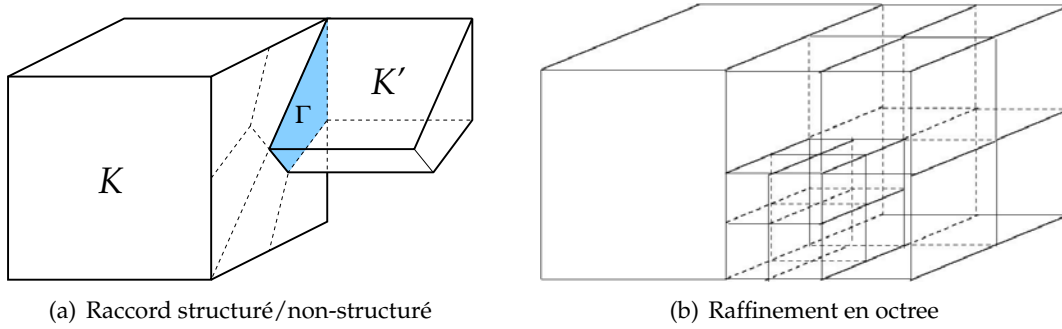


FIGURE 3.7: Illustration des maillages non-conformes h envisagés.

Le premier cas de non-conformité h envisagé (figure 3.7(a)) correspond à l'hybridation entre maillages structurés et non-structurés. Sur le schéma GD3D tel qu'il a été présenté dans la section 1.2, nous pouvons observer que de nombreuses simplifications apparaissent dans le cas de cellules parallélépipédiques droites. En effet, la transformation F_K envoyant l'élément de référence \hat{K} sur une cellule K donnée se réduit alors à une simple homothétie dans les 3 directions. Les termes des matrices élémentaires sont alors donnés par 3 scalaires pouvant correspondre à un pas de maillage dans les 3 directions (Δx , Δy et Δz). En outre, dans le cas d'un maillage cartésien, il est alors possible d'adopter une stratégie d'implémentation du schéma GD3D de type différences finies en balayant le maillage à l'aide de 3 boucles imbriquées (une par direction x , y ou z). Nous obtenons alors une grande simplification du schéma et des gains en temps calcul significatifs.

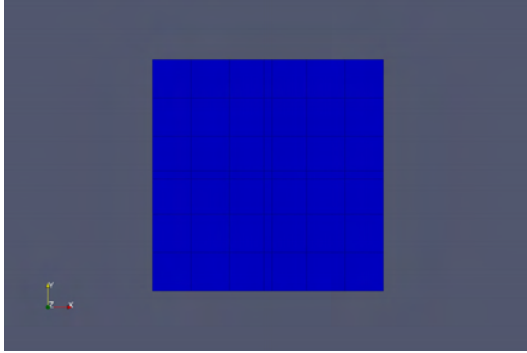
Toutefois, si nous nous restreignons à l'utilisation d'un maillage cartésien alors nous introduisons un effet « marches d'escalier » dans l'approximation des géométries courbes. Il est alors intéressant de revenir à des maillages non-structurés aux voisinages des obstacles permettant une meilleure description de ceux-ci. Malheureusement, à l'heure actuelle nous ne disposons pas d'outil permettant de générer un maillage hybride structuré/non-structuré conforme. Il est cependant possible de raccorder un maillage structuré avec un maillage non-structuré tétraédrique en découpant une face quadrilatère en deux triangles selon une diagonale. Le maillage non-structuré hexaédrique s'obtient alors par sub-division de ce dernier (voir figure 3.3). On obtient finalement le maillage non-conforme h représenté par la figure 3.7(a).

Le deuxième cas d'utilisation de maillage non-conforme h envisagé, illustré sur la figure 3.7(b), est beaucoup plus classique : il s'agit d'un raffinement de type *octree*. Dans ce type de maillage, nous partons d'une cellule donnée qui est divisée de manière régulière en 8 sous-éléments (2 coupes par direction), chaque élément pouvant à son tour être ou pas redécoupé selon le même processus. Ce type de maillage est typiquement utilisé dans le cadre de méthodes de raffinement h auto-adaptatives.

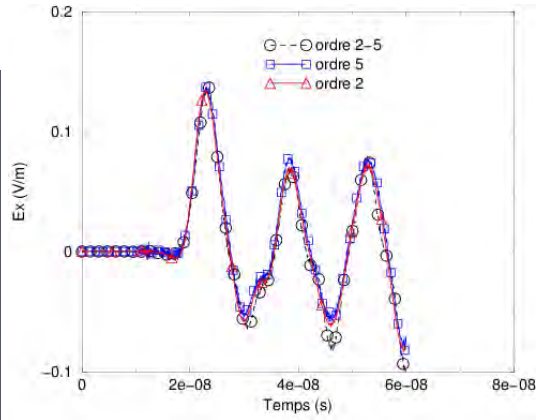
3.2 Problème lié aux non-conformités et méthode de correction

Les méthodes de calcul des flux non-conformes présentées ci-avant, présentent toutefois potentiellement une limitation. En effet, dans certains cas il est possible de voir apparaître des oscillations parasites au voisinage de l'interface entre deux zones de raffinement et ordre différents (voir par exemple le contre-exemple présenté dans [43]).

Afin d'illustrer ceci, nous utilisons le schéma GD3D sur un exemple non-physique en considérant le cas d'une boîte métallique à l'intérieur de laquelle est introduite une onde plane. Pour la résolution numérique nous allons utiliser un maillage non-conforme en ordre mélangeant des ordres 2 à 5 selon la stratégie décrite dans la section 3.1.1. La motivation et le choix de tels ordres sont introduits par l'utilisation de mailles de tailles différentes, une maille au centre étant choisie 5 fois plus petite que les autres (et donc traitée en Q_2 quand les plus grandes seront prises en Q_5). Nous représentons alors le maillage et la composante E_x du champ au centre de cette boîte sur la figure 3.8. Pour valider les résultats nous effectuons les comparaisons avec les résultats Q_5 sur le maillage et Q_2 sur un maillage de dimension caractéristique donnée par la plus petite maille, soit une comparaison avec (Q_5, h) et $(Q_2, h/5)$. On peut alors observer des phénomènes de « sur-oscillations » autour des temps $3e - 8$ et $4.5e - 8$.



(a) Maillage hybride utilisé

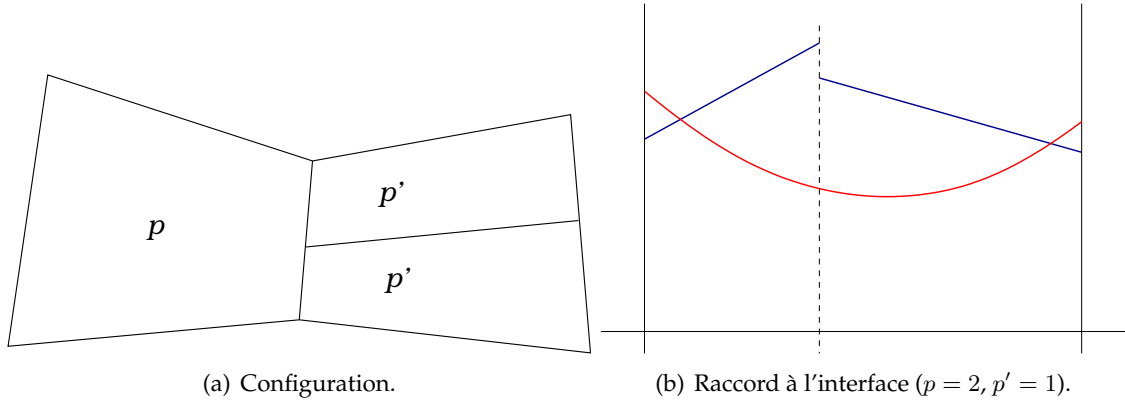


(b) Composante E_x du champ relevée au milieu de la boîte

FIGURE 3.8: Exemple de résolution hybride en 3D

Il semblerait que la principale raison de l'apparition de tels phénomènes soit une oscillation de type Gibbs au niveau d'un raccord entre fonctions de base de nature différentes. On peut ainsi être amené à une configuration telle que celle représentée sur la figure 3.9. Nous allons donc essayer de proposer une méthode de « correction » pour éviter ces phénomènes.

Afin de présenter la construction de notre méthode de correction, nous revenons à une présentation générale du système. Soit le problème de Friedrichs, en transformée de Fourier-

FIGURE 3.9: Illustration du problème induit par la non-conformité hp .

Laplace de covariable $\Re e(z) > 0$, suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in V, \\ &\begin{cases} zA_0u + \sum_i A_i \partial_i u + Bu = f, & \text{sur } \Omega \\ Mu = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $V \subset L^2$, f est un terme source régulier, et M décrit la condition au bord $\partial\Omega$ du domaine d'étude Ω [87]. Soit maintenant \mathcal{T}_h un maillage de Ω vérifiant $\cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{K} = \Omega$ et $\text{int}(\mathcal{K} \cap \mathcal{K}') = \emptyset$ si $\mathcal{K} \neq \mathcal{K}'$. Soit de plus $H^1(\mathcal{T}_h)$ l'espace des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ telles que $f|_{\mathcal{K}} \in H^1(\mathcal{K})$ pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$. On peut alors montrer que si $u \in H^1(\mathcal{T}_h)$ la solution de (3.5) est équivalente à résoudre la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver } u \in V, \forall v \in V, a(u, v) = b(v) \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} \left(zA_0u + \sum_i A_i \partial_i u + Bu \right) \cdot v + \int_{\partial\Omega} Mu \cdot v \\ &\quad - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega} \left(\sum_i A_i \mathbf{n}_i \right)^- \llbracket u \rrbracket \cdot v^-, \quad b(v) = \int_{\Omega} f \cdot v, \end{aligned}$$

où $\llbracket u \rrbracket$ désigne le saut de u sur la frontière $\partial\mathcal{K}$, \mathbf{n} est la normale sortante à \mathcal{K} , et A^- est la partie négative d'une matrice A donnée c'est-à-dire $A^- = P \text{diag}(\min(0, \lambda_i)) P^{-1}$ pour la diagonalisation $A = P \text{diag}(\lambda_i) P^{-1}$ de A . Cette formulation variationnelle correspond à l'écriture d'un schéma GD en flux complètement décentrés. Cette dernière est obtenue, en prenant un espace d'approximation de dimension finie $V_h \subset H^1(\mathcal{T}_h)$, par

$$\text{Trouver } u_h \in V_h, \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = b(v_h). \quad (3.7)$$

Pour éviter l'apparition de *spurious modes*, on se propose de rechercher une solution \tilde{u}_h de (3.7) dans un sous-espace $\tilde{V}_h \subset V_h$ telle que les espaces de traces de part et d'autre de la

frontière d'une cellule $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ donnée soient les mêmes. En notant γ_F l'application trace de $L^2(\mathcal{K})$ à valeurs dans $L^2(F)$ pour $F \subset \partial\mathcal{K}$, on obtient donc comme condition

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \bigcup_{F \subset \mathcal{K}} \gamma_F \left(\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}} \right) = \bigcup_{F' \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{K}', \mathcal{K}' \neq \mathcal{K}, \mathcal{K}' \cap \mathcal{K} \neq \emptyset} \gamma_{F'} \left(\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}'} \right). \quad (3.8)$$

Il existe un certain nombre de travaux effectués dans le cadre des hybridations de maillages non-conformes sur la méthode Galerkin discontinue. Pour éviter qu'apparaissent dans ce cadre le type de phénomènes précédemment décrits, il faut là encore garantir la continuité de la trace des espaces d'approximation au niveau des frontières. Pour cela, il existe une méthode qui consiste à choisir des fonctions de bases adaptées à l'hybridation, comme ce qui a été proposé dans les travaux de M. Bergot [18] et à écrire le schéma GD directement sur l'espace \tilde{V}_h ainsi construit. Cette solution présente néanmoins quelques difficultés de mise en œuvre. En effet, on perd alors, dans notre cas tout l'intérêt du schéma Galerkin discontinu utilisé en remplissant les matrices de saut. Pour éviter ce problème, nous allons proposer ici une autre stratégie qui consiste à corriger à chaque itération la solution obtenue par notre méthode, pour la ramener sur \tilde{V}_h .

La recherche d'une telle solution $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$ revient donc à résoudre le nouveau problème

$$\text{Trouver } \tilde{u}_h \in \tilde{V}_h, \forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h, a(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) = b(\tilde{v}_h). \quad (3.9)$$

Remarque 3.2 Comme $\tilde{V}_h \subset V_h$, le problème (3.9) est bien posé dès que (3.7) l'est. En effet, la condition de Babuska-Brézzi vérifiée par a sur V_h implique l'inversibilité de a sur \tilde{V}_h .

Notons toutefois que cela ne permet pas de garantir la convergence de \tilde{u}_h vers u car on ne vérifie pas la consistance de l'approximation sur \tilde{V}_h . Une condition suffisante serait de demander l'existence d'un espace $V'_h \subset \tilde{V}_h$ tel que la consistance de l'approximation soit garantie sur V'_h .

Les problèmes (3.7) et (3.9) n'étant par formulées sur les mêmes espaces, les formes a et b ne sont pas forcément calculées avec les mêmes quadratures dans les deux cas. En notant respectivement a_{V_h} , b_{V_h} , $a_{\tilde{V}_h}$ et $b_{\tilde{V}_h}$ les deux formes correspondant aux résolutions de (3.7) et (3.9), nous effectuons l'hypothèse de conformité suivante :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \tilde{V}_h, b_{\tilde{V}_h}(\varphi) = b_{V_h}(\varphi), \\ \forall (\varphi, \psi) \in \tilde{V}_h \times \tilde{V}_h, a_{\tilde{V}_h}(\varphi, \psi) = a_{V_h}(\varphi, \psi). \end{cases} \quad (3.10)$$

Comme $\tilde{V}_h \subset V_h$, la deuxième partie de l'hypothèse est vérifiée dès que les formules de quadrature utilisées pour le calcul de (3.9) sont celles utilisées pour le calcul de (3.7). Par contre, la première partie de (3.10) concerne la prise en compte du terme source f et est alors par exemple trivialement vérifiée si $\text{supp}(f) \subset \mathcal{O}$ avec $V_h|_{\mathcal{O}} = \tilde{V}_h|_{\mathcal{O}}$ ou encore si $f \in \tilde{V}_h$.

Nous introduisons un nouvel opérateur lié à la projection par la définition suivante :

Définition 3.3 Pour tout opérateur $\Pi : V_h \rightarrow V_h$, on note Π^a l'application (donnée par identification de Riesz) de V_h dans V_h telle que

$$\forall \varphi, \psi \in V_h, a_{V_h}(\varphi, \Pi\psi) = \langle \Pi^a \varphi, \psi \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Il est alors possible d'obtenir la solution de (3.9) en fonction de celle de (3.7) :

Théorème 3.4 Sous l'hypothèse (3.10), alors la solution \tilde{u}_h de (3.9) est obtenue de la solution u_h de (3.7) par la relation

$$\tilde{u}_h = u_h - P_{\text{Ker}(\Pi^a)} u_h, \quad (3.12)$$

où Π^a est l'adjoint au sens de la définition 3.3 d'une fonction $\Pi : V_h \rightarrow \tilde{V}_h$ surjective quelconque.

Preuve. Sous l'hypothèse (3.10), en effectuant la différence entre (3.7) et (3.9), il vient

$$\forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h, a_{V_h}(u_h - \tilde{u}_h, \tilde{v}_h) = 0. \quad (3.13)$$

Soit maintenant $\Pi : V_h \rightarrow \tilde{V}_h$ une application surjective. La relation (3.13) se récrit comme

$$\forall v_h \in V_h, a_{V_h}(u_h - \tilde{u}_h, \Pi v_h) = 0. \quad (3.14)$$

Par la définition 3.3 on déduit de (3.14) l'identité

$$\forall v_h \in V_h, \langle \Pi^a(u_h - \tilde{u}_h), v_h \rangle_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (3.15)$$

Alors, en prenant $v_h = \Pi^a(u_h - \tilde{u}_h) \in V_h$ dans (3.15), on en déduit que

$$u_h - \tilde{u}_h \in \text{Ker}(\Pi^a). \quad (3.16)$$

Soit pour une fonction $v_h \in V_h$ donnée la décomposition $v_h = v_h^{\text{Ker}} + v_h^\perp$ avec $v_h^{\text{Ker}} \in \text{Ker}(\Pi^a)$ et $v_h^\perp \in \text{Ker}(\Pi^a)^\perp$. La relation (3.16) donne

$$\tilde{u}_h^\perp = u_h^\perp = u_h - P_{\text{Ker}(\Pi^a)} u_h.$$

La preuve se termine en utilisant le résultat du lemme 3.5. ■

Lemme 3.5 Pour toute application surjective $\Pi : V_h \rightarrow \tilde{V}_h$, si la condition (3.10) est satisfaite, alors la solution \tilde{u}_h de (3.9) est dans $\text{Ker}(\Pi^a)^\perp$.

Preuve. Soit la décomposition $\tilde{u}_h = \tilde{u}_h^{\text{Ker}} + \tilde{u}_h^\perp$ avec $\tilde{u}_h^{\text{Ker}} \in \text{Ker}(\Pi^a)$ et $\tilde{u}_h^\perp \in \text{Ker}(\Pi^a)^\perp$. Par définition \tilde{u}_h^{Ker} vérifie donc $\Pi^a \tilde{u}_h^{\text{Ker}} = 0$, soit encore de manière équivalente $\forall v_h \in V_h, \langle \Pi^a \tilde{u}_h^{\text{Ker}}, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$. Or, par la définition de Π^a (3.11), il suit que \tilde{u}_h^{Ker} vérifie

$$\forall v_h \in V_h, a_{V_h}(\tilde{u}_h^{\text{Ker}}, \Pi v_h) = 0.$$

Grâce à la surjectivité de Π , en utilisant la condition (3.10), on en déduit que \tilde{u}_h^{Ker} est donc solution de

$$\forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h, a_{\tilde{V}_h}(\tilde{u}_h^{\text{Ker}}, \tilde{v}_h) = 0.$$

Le caractère bien posé de (3.9) permet alors de conclure que $\tilde{u}_h^{\text{Ker}} = 0$. ■

Le théorème 3.4 donne donc un moyen d'obtenir la solution dans l'espace conforme \tilde{V}_h à partir de celle calculée sur l'espace V_h via l'algorithme suivant :

1. calcul de $u_h \in V_h$ par résolution de (3.7),
2. calcul de \tilde{u}_h par projection de u_h à l'aide de la formule (3.12).

Comme présenté au début de la section, l'avantage d'un tel algorithme réside tout d'abord dans l'utilisation de la forme a assemblée sur V_h ce qui permet de garder les bonnes propriétés éventuelles des fonctions de base choisies (condensation de masse, simplification des termes de rigidité, localisation des calculs de flux, bon conditionnement ...). Par ailleurs, cet algorithme se présente comme une correction de la solution calculée sur V_h et est donc faiblement intrusif dans le calcul.

La construction de l'opérateur de projection $P_{\text{Ker}(\Pi^a)}$, sans avoir à déterminer les fonctions de base de l'espace \tilde{V}_h , est traitée dans la section suivante.

3.3 Construction de la méthode de correction sur modèle TM

La construction de l'opérateur $P_{\text{Ker}(\Pi^a)}$, tel qu'il a été introduit dans la section 3.2, s'avère extrêmement difficile pour les fonctions de bases utilisées dans le schéma GD3D (voir section 1.2). En effet, nous voyons que pour réaliser (3.8) il faut évaluer l'espace trace de $\mathcal{B}_h^{3D}|_{\mathcal{K}}$ pour toute cellule \mathcal{K} présentant une non-conformité en h . Plus précisément, il faut trouver une manière de définir l'espace \tilde{V}_h correspondant à la perte de un ou plusieurs degrés de liberté sur la frontière sachant que tous les éléments intérieurs contribuent à l'espace trace.

Afin de pouvoir évaluer la constructibilité du schéma de correction suggéré par le théorème 3.4, nous allons nous placer sur un espace d'approximation permettant une manipulation plus simple des degrés de liberté sur les frontières des cellules. Nous choisissons donc d'utiliser des éléments de Gauss-Lobatto [1]. Et pour simplifier encore l'étude, nous allons nous placer dans le cas d'une modélisation 2D des équations de Maxwell décrite par le mode Transverse Magnétique (TM).

Dans un premier temps nous allons donc introduire rapidement le système étudié ainsi que le schéma GD utilisé. Nous illustrons avec un nouvel exemple numérique que la problématique des espaces non-conformes est toujours valable dans le cas simplifié 2D. Enfin, nous construisons la méthode de correction et en particulier l'opérateur de projection $\Pi : V_h \rightarrow \tilde{V}_h$ nécessaire dans plusieurs types de non-conformités en h et/ou p .

3.3.1 Présentation du système Maxwell TM et schéma GD2D

On présente ici le modèle simplifié 2D étudié ainsi que le schéma GD2D utilisé pour les applications en espace non-conforme.

Equations de Maxwell en mode TM

On considère la résolution des équations de Maxwell adimensionnées en mode TM dans la direction z , en domaine borné Ω , décrites par :

$$\begin{cases} \partial_t E_z + \partial_y H_x - \partial_x H_y = 0, & \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t H_x + \partial_y E_z = 0, & \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t H_y - \partial_x E_z = 0, & \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

A ce système nous adjoindrons des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$ qui seront

- soit des conditions métalliques parfaites :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

- soit des conditions de type Silver-Müller

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Schéma GD2D

Pour la résolution nous utiliserons un schéma Galerkin discontinu en espace avec des fonctions de base données par les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux nœuds de Gauss-Lobatto de degré p (on pourra les trouver dans [1]) et des flux totalement décentrés. Pour simplifier les écritures dans la suite, nous considérons que le maillage \mathcal{T}_h utilisé est cartésien. Le schéma en temps est de type *leap-frog*. Le schéma ainsi assemblé peut se mettre sous la forme matricielle

Pour tout $n \in \{0; \dots; N-1\}$, trouver $(E_z^{n+1}, H_x^{n+\frac{3}{2}}, H_y^{n+\frac{3}{2}})$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{M}{\Delta t} E_z^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} E_z^n - F_{E_z, E_z} E_z^n - R_y H_x^{n+\frac{1}{2}} + R_x H_y^{n+\frac{1}{2}} \\ \quad - F_{E_z, H_x} H_x^{n+\frac{1}{2}} - F_{E_z, H_y} H_y^{n+\frac{1}{2}} + S_{E_z}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{M}{\Delta t} H_x^{n+\frac{3}{2}} = \frac{M}{\Delta t} H_x^{n+\frac{1}{2}} - R_y E_z^{n+1} \\ \quad - F_{H_x, E_z} E_z^{n+1} - F_{H_x, H_x} H_x^{n+\frac{1}{2}} - F_{H_x, H_y} H_y^{n+\frac{1}{2}} + S_{H_x}^{n+1}, \\ \frac{M}{\Delta t} H_y^{n+\frac{3}{2}} = \frac{M}{\Delta t} H_y^{n+\frac{1}{2}} + R_x E_z^{n+1} \\ \quad - F_{H_y, E_z} E_z^{n+1} - F_{H_y, H_x} H_x^{n+\frac{1}{2}} - F_{H_y, H_y} H_y^{n+\frac{1}{2}} + S_{H_y}^{n+1}, \end{cases} \quad (3.18)$$

où M est la matrice de masse, R_ν pour $\nu \in \{x, y\}$ sont respectivement les matrices de rigidité partielles associées aux formes $(\varphi, \psi) \mapsto \int_\Omega \partial_\nu \varphi \cdot \psi$, $F_{\alpha, \theta}$ correspond à la contribution du flux de l'inconnue $\theta \in \{E_z, H_x, H_y\}$ sur l'équation donnant le champ $\alpha \in \{E_z, H_x, H_y\}$,

et enfin S_α sont les contributions d'un terme source éventuel sur le bord (en $x = 0$ sur l'application) sur l'équation donnant l'inconnue $\alpha \in \{E_z, H_x, H_y\}$. Les conditions de bords métalliques et Silver-Müller sont introduites sous formes de flux et prises en compte dans les termes $F_{\alpha,\theta}$.

En suivant les méthodes introduites dans la section 3.1 pour le calcul des flux, entre deux cellules d'ordre et/ou de raffinement différents, nous utilisons une quadrature par morceaux sur chaque partie dont l'ordre est donné par l'ordre le plus élevé entre les deux cellules.

Calcul de la CFL du schéma GD2D

Enfin, en l'absence d'étude de stabilité pour ce choix de fonctions de base, nous calculons le pas de temps Δt automatiquement de la manière suivante : à partir de (3.18), en reformulant le système sous la forme

$$(I + \Delta t A) \begin{pmatrix} E_z^{n+1} \\ H_x^{n+\frac{3}{2}} \\ H_y^{n+\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = (I - \Delta t B) \begin{pmatrix} E_z^n \\ H_x^{n+\frac{1}{2}} \\ H_y^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t M^{-1} S_{E_z}^{n+\frac{1}{2}} \\ \Delta t M^{-1} S_{H_x}^{n+1} \\ \Delta t M^{-1} S_{H_y}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M^{-1}(R_y + F_{H_x, E_z}) & 0 & 0 \\ M^{-1}(-R_x + F_{H_y, E_z}) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} M^{-1}F_{E_z, E_z} & M^{-1}(R_y + F_{E_z, H_x}) & M^{-1}(-R_x + F_{E_z, H_y}) \\ 0 & M^{-1}F_{H_x, H_x} & M^{-1}F_{H_x, H_y} \\ 0 & M^{-1}F_{H_y, H_x} & M^{-1}F_{H_y, H_y} \end{pmatrix},$$

on constate que la matrice A est nilpotente d'ordre 2. La solution de (3.19) se déduit

$$\begin{pmatrix} E_z^{n+1} \\ H_x^{n+\frac{3}{2}} \\ H_y^{n+\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = (I - \Delta t A - \Delta t B + \Delta t^2 AB) \begin{pmatrix} E_z^n \\ H_x^{n+\frac{1}{2}} \\ H_y^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + (I - \Delta t A) \begin{pmatrix} \Delta t M^{-1} S_{E_z}^{n+\frac{1}{2}} \\ \Delta t M^{-1} S_{H_x}^{n+1} \\ \Delta t M^{-1} S_{H_y}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Le système (3.18) sera donc stable si et seulement si Δt vérifie la condition CFL (sous forme implicite) suivante

$$\lambda_{\max}(\Delta t A + \Delta t B - \Delta t^2 AB) < 1. \quad (3.20)$$

La recherche d'un tel Δt est finalement effectuée par dichotomie sur l'équation (3.20).

Remarque 3.6 Pour les comparaisons numériques effectuées dans la suite (espace non-conforme $p2h1/p1h3$), nous avons pu constater que les valeurs de Δt satisfaisant la condition CFL calculés par (3.20) vérifiaient

$$\Delta t_{p2h1/p1h3} < \min(\Delta t_{p2h1}, \Delta t_{p1h3}),$$

ce qui correspond bien au résultat annoncé dans les travaux de H. Fahs sur les maillages non-conformes [44].

3.3.2 Illustration de la problématique avec le schéma GD2D

Le domaine d'étude est une portion de guide d'ondes $\Omega = [0, 4] \times [0, 1]$. Nous allons simuler la propagation d'un mode selon la direction x dans ce guide. Les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = 1$ sont donc des conditions de type métal parfait données par

$$E_z(y = 0) = E_z(y = 1) = 0. \quad (3.21)$$

Le guide est terminé à son extrémité droite par des conditions de type Silver-Müller :

$$-E_z(x = 4) = H_y(x = 4). \quad (3.22)$$

L'excitation est introduite par une condition d'impédance (de type Silver-Müller) à l'extrémité gauche du guide à l'aide de la valeur de la solution exacte du mode utilisé qui est

$$\begin{cases} E_z(t, x, y) = \sin\left(\frac{2\pi n}{L_y}y\right) \cos(\omega t - \beta x), \\ H_x(t, x, y) = -\frac{2\pi n}{\omega L_y} \cos\left(\frac{2\pi n}{L_y}y\right) \sin(\omega t - \beta x), \\ H_y(t, x, y) = -\frac{\beta}{\omega} \sin\left(\frac{2\pi n}{L_y}y\right) \cos(\omega t - \beta x), \end{cases} \quad (3.23)$$

où $L_y = 1$ est la largeur du guide, n est le mode simulé, ω est la pulsation, et enfin $\beta = \sqrt{\omega^2 - \frac{4\pi^2 n^2}{L_y^2}}$. Pour l'exemple traité, nous prendrons $n = 2$ et $\omega = 10$.

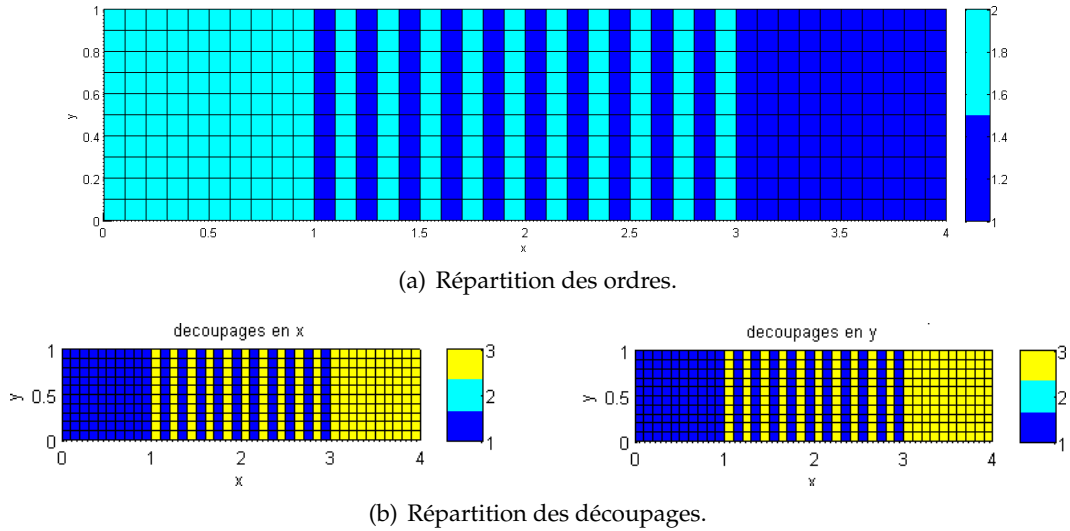


FIGURE 3.10: Espace d'approximation utilisé.

Pour ce test, nous allons considérer une approximation non-conforme en h et p alternant des ordres 2 sur des cellules de taille h et des ordres 1 sur des cellules de taille $h/3$. Cet espace sera désigné par $p2h1/p1h3$. Les répartitions des ordres et des découpages d'espace utilisées sont décrites sur la figure 3.10.

Remarque 3.7 On constate que la condition (3.8) n'est pas vérifiée comme en atteste la non-coïncidence des degrés de liberté de part et d'autre des frontières délimitant les zones $p2h1$ et $p1h3$, comme représenté sur la figure 3.11. L'espace \tilde{V}_h reviendrait donc à « éliminer » certains degrés de liberté pour assurer la conformité des espaces de traces au sens de (3.8).

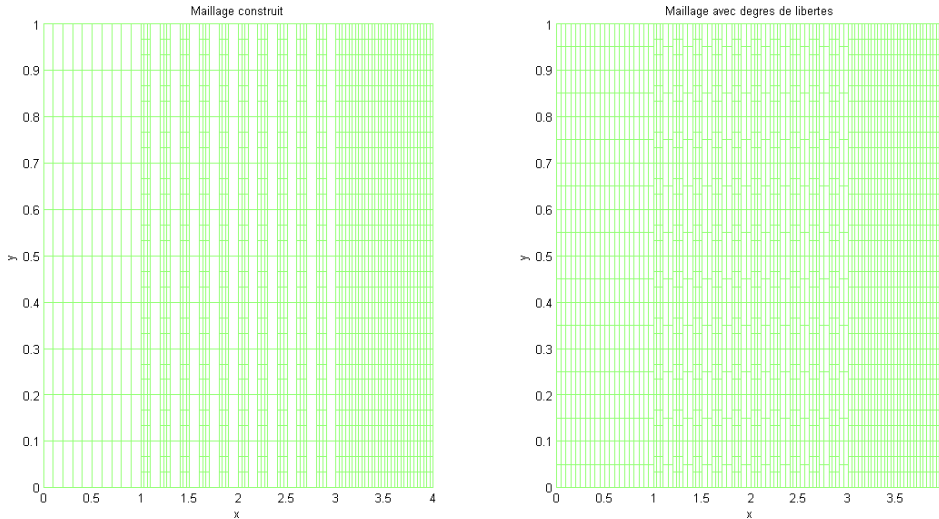
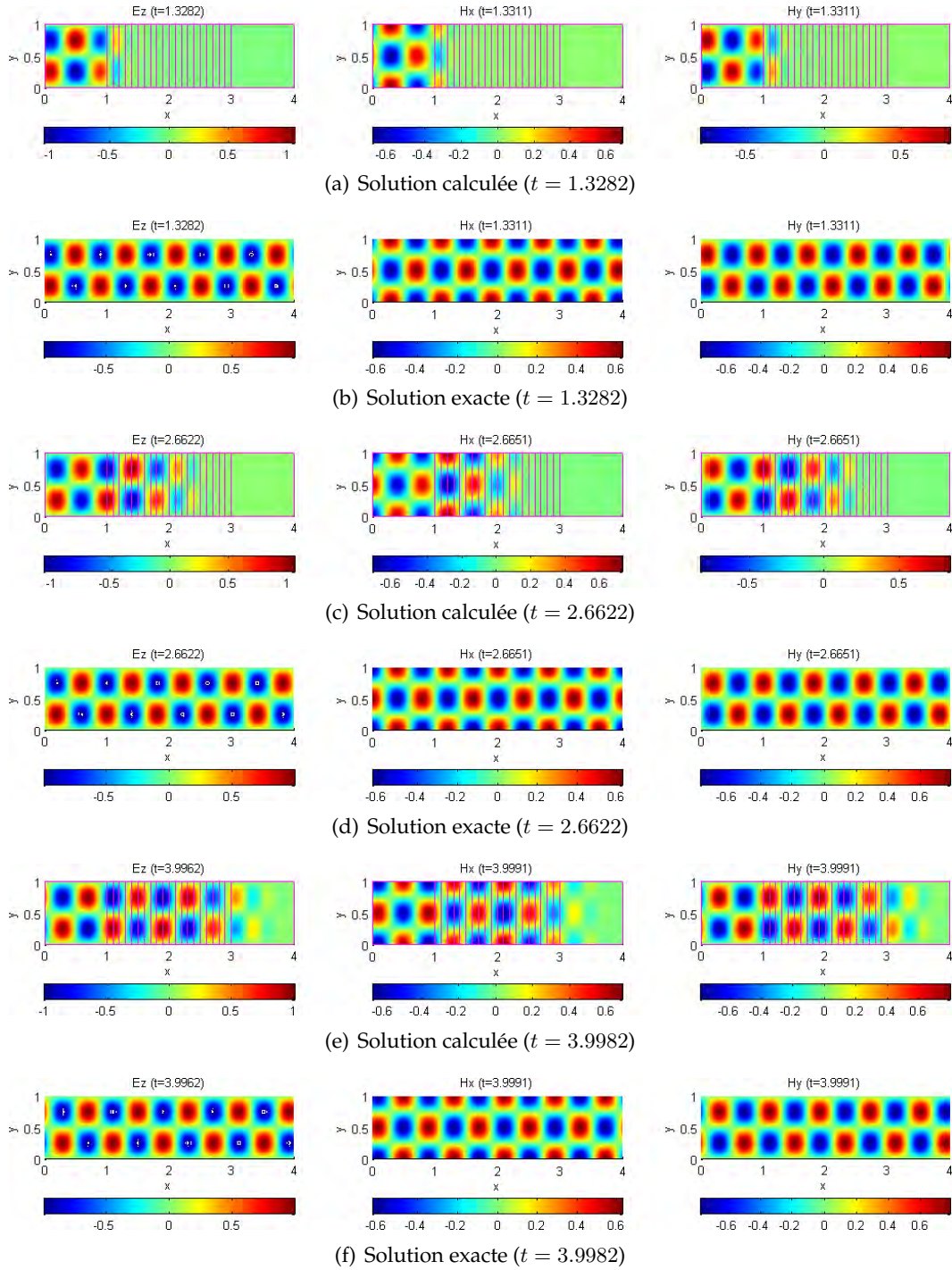


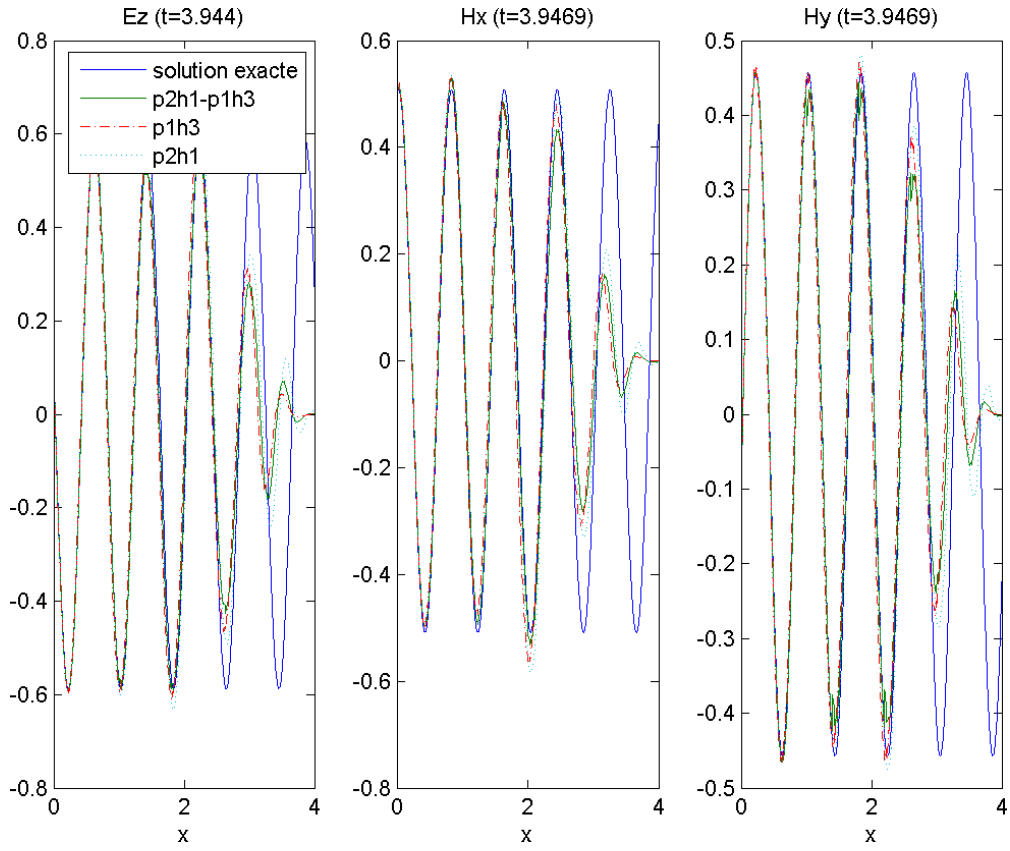
FIGURE 3.11: Répartition des degrés de liberté sur le maillage.

Par ailleurs, en reprenant la remarque 3.2 sur cet exemple, un candidat pour l'espace V'_h garantissant la consistance est l'espace uniforme $p1h1$.

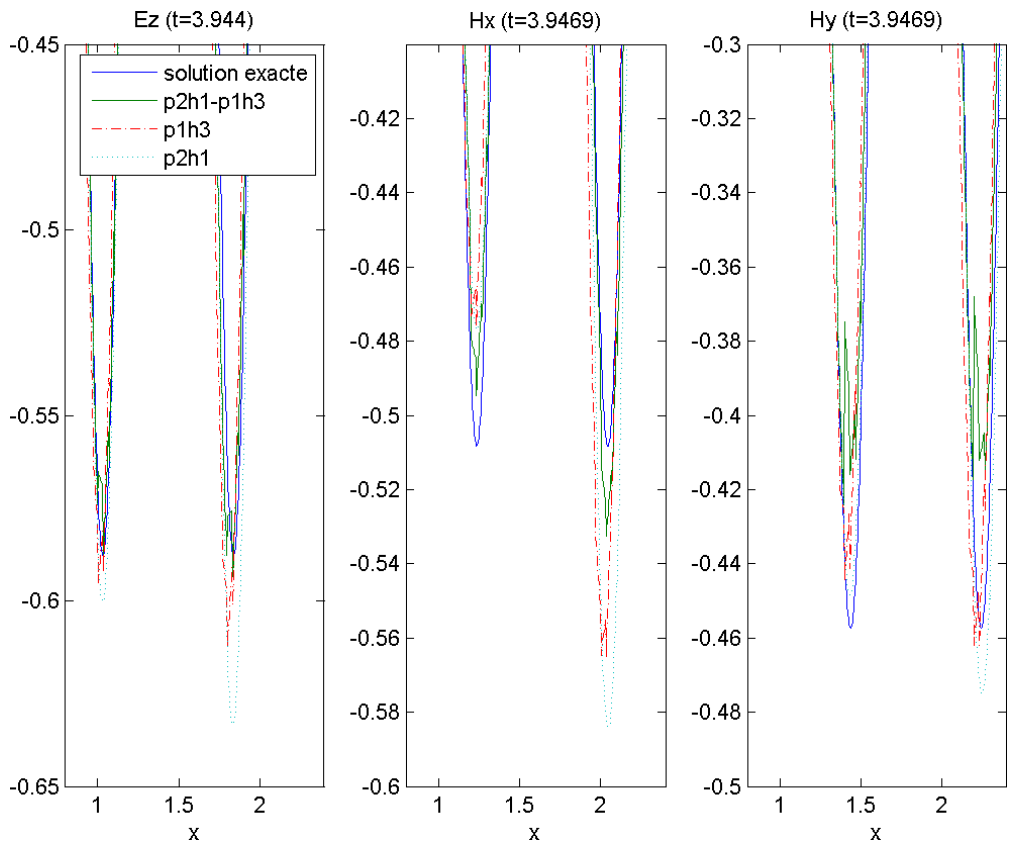
Pour pouvoir comparer les calculs sur approximations uniformes ($p2h1$ ou $p1h3$) avec ceux sur approximations non-conformes ($p2h1/p1h3$) nous choisirons le même pas de temps pour tous, *i.e.* celui donné pour $p2h1/p1h3$ dans la remarque 3.6.

La solution obtenue sur l'espace non-conforme $p2h1/p1h3$ est représentée sur la figure 3.12. Les résultats sont tout à fait acceptables et montrent *a priori* un bon comportement au cours du temps de la solution calculée par le schéma GD sur l'espace non-conforme. Toutefois, pour affiner ces résultats nous effectuons une coupe en y de la solution et représentons sur la figure 3.13 les résultats obtenus dans ce cas ainsi que pour les espaces conformes $p2h1$ et $p1h3$. Sur cette nouvelle figure, il est possible de voir une détérioration de la solution qui apparaît pour $x \geq 1$. On constate en particulier sur la vue de H_y que les extrema présentent des oscillations pour le cas non-conforme mais pas dans les cas $p2h1$ et $p1h3$. Les solutions obtenues dans ces deux derniers cas semblent alors meilleures que celle de l'espace $p2h1/p1h3$.

FIGURE 3.12: Représentation de la solution calculée sur l'espace non-conforme $p2h1/p1h3$.



(a) Coupe de la solution



(b) Détail de la coupe

FIGURE 3.13: Coupe de la solution en $y = 0.6$ à $t = 3.944$.

3.3.3 Construction de la méthode

Nous avons vu dans le théorème 3.4 que pour retrouver la solution dans l'espace à traces conformes \tilde{V}_h à partir de celle calculée dans V_h il suffisait d'utiliser un projecteur particulier : $P_{\text{Ker}(\Pi^a)}$. Dans cette section nous donnons donc la construction de la projection $P_{\text{Ker}(\Pi^a)}$ pour pouvoir appliquer le théorème 3.4. La particularité de ce résultat est que la solution obtenue est indépendante du choix de l'application surjective sur \tilde{V}_h , notée Π , utilisée. Nous allons donc montrer dans un premier temps comment, à partir d'une application Π donnée, nous obtenons $P_{\text{Ker}(\Pi^a)}$. La difficulté reste alors de proposer une telle application Π . Dans l'objectif annoncé en section 3.2 de ne pas construire les fonctions de base de \tilde{V}_h , nous allons donc expliciter des bons candidats pour Π dans plusieurs cas permettant de traiter des non-conformités h et/ou p dans le cadre GD2D.

3.3.3.1 Expressions matricielles préliminaires

Dans un premier temps, nous pouvons donner une forme matricielle à la définition 3.3. Soit $[a]$ la matrice représentant la forme bilinéaire a_{V_h} dans la base de V_h utilisée pour former le GD2D. Alors, en notant $[\Pi]$ et $[\Pi^a]$ les matrices correspondant respectivement aux opérateurs Π et Π^a (défini par (3.11)) on a

$$[\Pi^a] = [\Pi]^T [a]. \quad (3.24)$$

Maintenant, dans le cas d'un schéma en temps tel que celui utilisé dans la section 3.3.1, nous pouvons revenir à des formulations de la forme (3.7) et (3.9). Pour ce faire, nous utilisons la forme matricielle (3.19). Le schéma GD associé s'écrit alors comme

$$\text{Trouver } u_h^{n+1} \in V_h, \forall v_h \in V_h, a_V(u_h^{n+1}, v_h) = b^n(v_h), \quad (3.25)$$

où a_V est la forme bilinéaire de représentation matricielle $[a] = I + \Delta t A$, b^n est la forme linéaire associée au produit scalaire par le vecteur $[b^n]$, soit :

$$[b^n] = (I - \Delta t A - \Delta t B + \Delta t^2 AB) U^n + (I - \Delta t A) \begin{pmatrix} \Delta t M^{-1} S_{E_z}^{n+\frac{1}{2}} \\ \Delta t M^{-1} S_{H_x}^{n+1} \\ \Delta t M^{-1} S_{H_y}^{n+1} \end{pmatrix},$$

et enfin u_h^n est l'élément de V_h de coordonnées données par le vecteur

$$[U]^n = \begin{pmatrix} E_z^n \\ H_x^{n+\frac{1}{2}} \\ H_y^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.8 On peut obtenir une formulation équivalente en pré-multipliant les éléments $[a]$ et $[b^n]$ par

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix},$$

de sorte à obtenir une formulation matricielle sans avoir à calculer M^{-1} .

Il faut noter que le résultat du théorème 3.4 n'intervient que dans la matrice $[a]$ et pas le terme lié à $[b^n]$. Ainsi, sur cet exemple, nous pouvons constater que la formule définissant le projecteur sur $\text{Ker}(\Pi^a)$ pour la formulation (3.25) ne change pas avec l'itération en temps n . Il pourra donc être assemblé puis stocké dans la phase d'initialisation du code pour alléger les calculs.

Le reste de la section est dédié aux constructions d'opérateurs Π pour différents types de non-conformités. On supposera pour cela que l'espace V_h est composé de polynômes Q^p par morceaux sur tous les éléments $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, les ordres p étant associés à chaque cellule \mathcal{K} .

3.3.3.2 Non-conformités en p

Pour la construction de l'application Π dans le cas de non-conformités en p , nous allons procéder par étapes en commençant par le cas d'une non-conformité sur une seule face d'un élément, puis nous montrerons comment traiter le cas de non-conformités sur plusieurs faces d'un même élément et enfin nous donnerons l'écriture matricielle de l'application Π .

Cas d'une non-conformité en p sur une face

Soient \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 deux éléments distincts de \mathcal{T}_h , de frontière commune $F = \partial\mathcal{K}_1 \cap \partial\mathcal{K}_2$. En notant $\gamma_F^{\mathcal{K}}$ l'application trace de $V_h|_{\mathcal{K}}$ à valeurs dans $L^2(F)$, nous supposons que $\gamma_F^{\mathcal{K}_1}(V_h|_{\mathcal{K}_1}) = Q^{p_1}(F)$ et $\gamma_F^{\mathcal{K}_2}(V_h|_{\mathcal{K}_2}) = Q^{p_2}(F)$ avec $p_2 < p_1$. Par ailleurs, on suppose aussi que F est une composante connexe de $\partial\mathcal{K}_1$ et de $\partial\mathcal{K}_2$.

Par la condition (3.8), l'espace \tilde{V}_h doit donc vérifier

$$\begin{cases} \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} = \left\{ \varphi \in Q^{p_1}(\mathcal{K}_1), \gamma_F^{\mathcal{K}_1}(\varphi) \in Q^{p_2}(F) \right\} = (\gamma_F^{\mathcal{K}_1})^{-1}(Q^{p_2}(F)) \cap Q^{p_1}(\mathcal{K}_1), \\ \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2} = Q^{p_2}(\mathcal{K}_2). \end{cases}$$

On suppose alors qu'il existe une application $\rho_F^{p_2} : Q^{p_1}(F) \rightarrow Q^{p_1}(F)$ telle que $\text{Ker}(\rho_F^{p_2}) = Q^{p_2}(F)$. Nous montrons par la suite comment construire une telle application. Nous construisons, dans la proposition suivante, l'opérateur Π à partir du diagramme suivant :

$$Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \xrightarrow{\gamma_F^{\mathcal{K}_1}} Q^{p_1}(F) \xrightarrow{\text{Id} - \rho_F^{p_2}} Q^{p_2}(F).$$

Proposition 3.9 *L'application*

$$\begin{aligned} \Pi_p^{\mathcal{K}_1} : Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) &\longrightarrow Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \\ \varphi &\longmapsto P_{\text{Ker}(\rho_F^{p_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1})} \varphi \end{aligned} \quad (3.26)$$

est un projecteur de $Q^{p_1}(\mathcal{K}_1)$ d'image $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1}$.

Preuve. Soit $\varphi \in Q^{p_1}(\mathcal{K}_1)$. L'espace $Q^{p_1}(\mathcal{K}_1)$ est un espace euclidien, dont on peut écrire la décomposition en somme directe :

$$Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) = \text{Ker}(\gamma_F^{p_1}) \oplus \text{Ker}(\gamma_F^{p_1})^\perp.$$

Il existe ainsi un unique couple $(\varphi_{\text{Ker}}, \varphi^\perp) \in \text{Ker}(\gamma_F^{p_1}) \times \text{Ker}(\gamma_F^{p_1})^\perp$ tel que $\varphi = \varphi_{\text{Ker}} + \varphi^\perp$. Il vient donc, par linéarité de $\gamma_F^{p_1}$, que $\gamma_F^{p_1}(\varphi) = \gamma_F^{p_1}(\varphi^\perp)$. De même, par définition de $\rho_F^{p_2}$, nous avons la décomposition en somme directe :

$$Q^{p_1}(F) = \text{Ker}(\rho_F^{p_2}) \oplus \text{Im}(\rho_F^{p_2}) = Q^{p_2}(F) \oplus \text{Ker}(\rho_F^{p_2})^\perp. \quad (3.27)$$

Il existe donc un unique couple $(\phi_{p_2}, \phi_{\text{Ker}^\perp}) \in Q^{p_2}(F) \times \text{Ker}(\rho_F^{p_2})^\perp$ tel que

$$\gamma_F^{p_1}(\varphi) = \gamma_F^{p_1}(\varphi^\perp) = \phi_{p_2} + \phi_{\text{Ker}^\perp}.$$

La restriction de $\gamma_F^{p_1}$ à $\text{Ker}(\gamma_F^{p_1})^\perp$ induit une bijection, donc par la décomposition de $Q^{p_1}(\mathcal{K}_1)$, il existe un unique couple $(\varphi_{\text{Ker}^\perp}^\perp, \varphi_{p_2}^\perp) \in \text{Ker}(\gamma_F^{p_1})^\perp \times \text{Ker}(\gamma_F^{p_1})^\perp$ tel que

$$\gamma_F^{p_1}(\varphi_{\text{Ker}^\perp}^\perp) = \phi_{\text{Ker}^\perp} \text{ et } \gamma_F^{p_1}(\varphi_{p_2}^\perp) = \phi_{p_2}.$$

On a donc la décomposition finale (unique) de toute fonction $\varphi \in Q^{p_1}(\mathcal{K}_1)$ avec :

$$\varphi = \varphi_{\text{Ker}} + \varphi_{\text{Ker}^\perp}^\perp + \varphi_{p_2}^\perp. \quad (3.28)$$

Il vient alors que $P_{\text{Ker}(\rho_F^{p_2} \circ \gamma_F^{p_1})} \varphi = \varphi_{\text{Ker}} + \varphi_{p_2}^\perp$, et donc :

$$\gamma_F^{p_1}(\Pi_p^{\mathcal{K}_1} \varphi) = \gamma_F^{p_1}(\varphi_{\text{Ker}} + \varphi_{p_2}^\perp) = \gamma_F^{p_1}(\varphi_{p_2}^\perp) = \phi_{p_2} \in Q^{p_2}(F),$$

ce qui assure $\text{Im}(\Pi_p^{\mathcal{K}_1}) \subseteq \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1}$.

Réciproquement, par la décomposition (3.27), on déduit que si $\varphi \in \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1}$, alors $\gamma_F^{p_1}(\varphi) = \phi_{p_2} \in Q^{p_2}(F) = \text{Ker}(\rho_F^{p_2})$. Il vient donc que $\varphi \in \text{Ker}(\rho_F^{p_2} \circ \gamma_F^{p_1})$, soit $\Pi_p^{\mathcal{K}_1} \varphi = \varphi$, soit encore $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \subseteq \text{Im}(\Pi_p^{\mathcal{K}_1})$.

Enfin, la dernière égalité donne $(\Pi_p^{\mathcal{K}_1})^2 = \Pi_p^{\mathcal{K}_1}$, ce qui montre que $\Pi_p^{\mathcal{K}_1}$ est une projection et permet de conclure. ■

Cas de plusieurs non-conformités en p sur les faces d'un élément

Nous considérons maintenant le cas d'un élément \mathcal{K} ayant des non-conformités en ordre sur deux de ses faces, notées F_1 et F_2 . L'espace \tilde{V}_h vérifie donc

$$\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}} = \{\varphi \in Q^p(\mathcal{K}) / \gamma_{F_1}^{\mathcal{K}}(\varphi) \in Q^{p_1}(F_1) \text{ et } \gamma_{F_2}^{\mathcal{K}}(\varphi) \in Q^{p_2}(F_2)\}.$$

On introduit alors les opérateurs $\Pi_{p_1}^{\mathcal{K}}$ et $\Pi_{p_2}^{\mathcal{K}}$ correspondant respectivement au traitement de la seule non-conformité sur F_1 et sur F_2 tels que définis par la proposition 3.9. Enfin, nous notons $\Pi_p^{\mathcal{K}}$ l'application de V_h dans \tilde{V}_h recherchée et correspondant à la non-conformité sur l'élément \mathcal{K} au niveau des faces F_1 et F_2 . On a alors

Proposition 3.10 *L'application définie par l'identité $\Pi_p^\mathcal{K} = \Pi_{p_1}^\mathcal{K} \circ \Pi_{p_2}^\mathcal{K} = \Pi_{p_2}^\mathcal{K} \circ \Pi_{p_1}^\mathcal{K}$ est un projecteur de $Q^p(\mathcal{K})$ d'image $\tilde{V}_h|_\mathcal{K}$.*

Preuve. Notons tout d'abord $\tilde{V}_h^i|_\mathcal{K}$ ($i = 1, 2$) le sous-espace de $V_h|_\mathcal{K}$ ne présentant qu'une non-conformité sur la face F_i . Nous obtenons alors naturellement la relation $\tilde{V}_h|_\mathcal{K} = \tilde{V}_h^1|_\mathcal{K} \cap \tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}$ avec

$$\tilde{V}_h^i|_\mathcal{K} = \{\varphi \in Q^p(\mathcal{K}), \gamma_{F_i}^\mathcal{K}(\varphi) \in Q^{p_i}(F_i)\} = (\gamma_{F_i}^\mathcal{K})^{-1}(Q^{p_i}(F_i)) \cap Q^p(\mathcal{K}),$$

où p_i désigne l'ordre à obtenir sur la face F_i , et p est l'ordre polynomial à l'intérieur de \mathcal{K} . Remarquons déjà que, du fait que $\tilde{V}_h^i \subseteq V_h$ pour $i = 1, 2$, les projecteurs $(\Pi_{p_1}^\mathcal{K} \circ \Pi_{p_2}^\mathcal{K})$ et $(\Pi_{p_2}^\mathcal{K} \circ \Pi_{p_1}^\mathcal{K})$ sont bien définis. Comme $Q^p(\mathcal{K})$ est un espace vectoriel de dimension finie, on peut écrire la décomposition suivante :

$$Q^p(\mathcal{K}) = \tilde{V}_h^1|_\mathcal{K} \oplus \left(\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}\right)^\perp,$$

où $\left(\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}\right)^\perp$ est le complémentaire orthogonal de $\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}$ dans $Q^p(\mathcal{K})$. Pour toute fonction $f \in Q^p(\mathcal{K})$, il existe donc un unique couple $(f_1, f_1^\perp) \in \tilde{V}_h^1|_\mathcal{K} \times \left(\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}\right)^\perp$ tel que $f = f_1 + f_1^\perp$. Par la définition de $\Pi_{p_1}^\mathcal{K}$, on a alors $\Pi_{p_1}^\mathcal{K}(f) = f_1$.

On procède de même pour $\tilde{V}_h|_\mathcal{K} = \tilde{V}_h^1|_\mathcal{K} \cap \tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}$, en considérant son complémentaire orthogonal dans $\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}$:

$$\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K} = \tilde{V}_h|_\mathcal{K} \oplus \left(\tilde{V}_h|_\mathcal{K}\right)^{\perp_1}.$$

Il existe donc un unique couple $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_1^{\perp_1}) \in \tilde{V}_h|_\mathcal{K} \times \left(\tilde{V}_h|_\mathcal{K}\right)^{\perp_1}$ tel que $f_1 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_1^{\perp_1}$. On remarque alors que, comme $\tilde{V}_h|_\mathcal{K} = \tilde{V}_h^1|_\mathcal{K} \cap \tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}$, il vient $\left(\tilde{V}_h|_\mathcal{K}\right)^\perp = \left(\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}\right)^\perp \cup \left(\tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}\right)^\perp$ et $\left(\tilde{V}_h|_\mathcal{K}\right)^{\perp_1} = \left(\tilde{V}_h|_\mathcal{K}\right)^\perp \cap \tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}$. Ainsi, $\tilde{f}_1^{\perp_1} \in \left(\tilde{V}_h|_\mathcal{K}\right)^{\perp_1} = \tilde{V}_h^1|_\mathcal{K} \cap \left(\tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}\right)^\perp$. Ce qui permet de conclure notre calcul :

$$\Pi_{p_2}^\mathcal{K}(f_1) = (\Pi_{p_2}^\mathcal{K} \circ \Pi_{p_1}^\mathcal{K})(f) = \tilde{f}_1.$$

Nous introduisons alors une décomposition similaire pour la partie $\left(\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}\right)^\perp$:

$$\left(\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}\right)^\perp = \left(\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}\right)^\perp \cap \tilde{V}_h^2|_\mathcal{K} \oplus \left(\tilde{V}_h^1|_\mathcal{K}\right)^\perp \cap \left(\tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}\right)^\perp,$$

ce qui donne donc $f_1^\perp = g_2 + g_2^\perp$ avec $g_2 \in \tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}$ et $g_2^\perp \in \left(\tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}\right)^\perp$. D'où $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_1^{\perp_1} + g_2 + g_2^\perp$. Alors, $\Pi_{p_2}^\mathcal{K}(\tilde{f}_1^{\perp_1}) = \Pi_{p_2}^\mathcal{K}(g_2^\perp) = 0$ comme éléments de $\left(\tilde{V}_h^2|_\mathcal{K}\right)^\perp$ et $\Pi_{p_2}^\mathcal{K}(g_2) = g_2$ car $\Pi_{p_2}^\mathcal{K}$ projection. D'où

$$(\Pi_{p_1}^\mathcal{K} \circ \Pi_{p_2}^\mathcal{K})(f) = \tilde{f}_1 + \Pi_{p_1}^\mathcal{K}(g_2) = \tilde{f}_1 = (\Pi_{p_2}^\mathcal{K} \circ \Pi_{p_1}^\mathcal{K})(f),$$

car $g_2 \in \left(\tilde{V}_h^1|_{\mathcal{K}}\right)^\perp$. On peut donc introduire l'identification $\Pi_p^{\mathcal{K}}(f) = \tilde{f}_1$ via ces formules, ce qui permet de conclure. ■

Par la proposition 3.10 nous avons montré que pour obtenir le projecteur dans le cas de plusieurs non-conformités au bord d'un même élément, il suffira d'assembler les projecteurs $\Pi_p^{\mathcal{K}}$ donnés par la proposition 3.9 pour chaque non-conformité séparément et d'en effectuer le produit. La proposition garantit en effet que l'image après composition des projections sera la solution recherchée sur $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}}$.

Écriture matricielle de $\Pi_p^{\mathcal{K}}$

D'après les résultats précédents nous allons donc nous limiter à donner l'assemblage de l'application Π dans le cas d'une seule non-conformité d'ordre, le cas de multiples non-conformités étant obtenu par composition des différentes applications $\Pi_p^{\mathcal{K}}$ correspondantes.

Nous reprenons l'exemple présenté dans la section 3.3.2. Soit $\mathcal{K} = [a, b] \times [c, d]$ une cellule du maillage \mathcal{T}_h . Une base de l'espace $V_h|_{\mathcal{K}} = Q^p(\mathcal{K})$ est donc

$$\Phi_{ijk}(x, y) = \Phi_{ij}(x, y)\mathbf{e}_k = \Phi_i(x)\Phi_j(y)\mathbf{e}_k, \quad (3.29)$$

où les fonctions $(\Phi_l)_{l=1\dots p+1}$ sont des polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux points de Gauss-Lobatto 1D d'ordre p sur l'intervalle $[a, b]$ ou $[c, d]$ selon qu'elle est considérée comme fonction de x ou de y , et $(\mathbf{e}_k)_{k=1\dots 3}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Pour simplifier, nous allons considérer le cas d'une non-conformité sur la face $x = a$ de \mathcal{K} . Les autres cas se traitent de manière similaire. L'application $\gamma_F^{\mathcal{K}}$ est donc représentée par

$$[\gamma_F^{\mathcal{K}}]_{nm} = \Phi_m(a, y_n) \in \mathcal{M}_{p+1, (p+1)^2},$$

où m correspond à une renumérotation des indices doubles ij (par exemple en posant $m = j + (i - 1)(p + 1)$), et $(y_n)_{n=1\dots p+1}$ sont les points de Gauss-Lobatto d'ordre p sur le segment $[c, d]$.

Pour assembler la matrice $[\rho_F^q]$ correspondant à l'application ρ_F^q (pour $q < p$), nous introduisons d'abord la matrice de passage P_L^{GL} suivante

$$(P_L^{\text{GL}})_{ij} = \left(\frac{y_i - \frac{c+d}{2}}{d - c} \right)^j.$$

La matrice P_L^{GL} envoie la base des polynômes de Legendre sur les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux points de Gauss-Lobatto dans $Q^p([c, d])$. On obtient alors

$$[\rho_F^q] = P_L^{\text{GL}} D_q (P_L^{\text{GL}})^{-1},$$

où D_q est la matrice diagonale telle que $(D_q)_{ii} = \delta_{i>q}$.

La matrice de Π_p^K est finalement obtenue en utilisant la formule de projection sur le noyau [65]

$$[\Pi_p^K] = I_{(p+1)^2} - ([\rho_F^q][\gamma_F^K])^+ [\rho_F^q][\gamma_F^K],$$

où pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}$, la matrice $M^+ \in \mathcal{M}_{p,n}$ est sa pseudo-inverse.

3.3.3.3 Non-conformité en h sur une face

Pour traiter le cas de la non-conformité en h , nous allons procéder selon les mêmes étapes que pour la non-conformité en p , à savoir la décomposition du projecteur en une composition d'applications facilement calculables.

Cas d'une non-conformité en h sur un seul bord de \mathcal{K}

On considère maintenant le cas d'une cellule \mathcal{K} se raccordant de manière non-conforme en h sur deux cellules \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 . Le cas du découpage du raccord sur un bord avec plus de deux éléments se déduit simplement. Les ordres d'approximation dans chaque cellule sont supposés égaux à p fixé. On note F la frontière du raccord sur $\partial\mathcal{K}$, et F_i la frontière correspondante sur \mathcal{K}_i . On a ainsi $F = F_1 \cup F_2$ (voir figure 3.14).

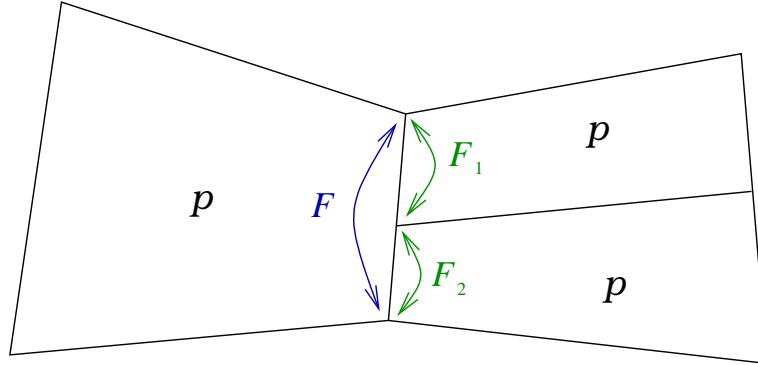


FIGURE 3.14: Configuration pour la gestion d'une non-conformité en h .

On désigne encore par γ_F^K l'application trace de $Q^p(\mathcal{K})$ à valeurs dans $Q^p(F)$. Soit $\gamma_F^{K_1 \times K_2} : Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2) \rightarrow Q^p(F_1) \times Q^p(F_2)$ l'application trace donnant les traces sur F_1 et F_2 à partir des valeurs dans \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 . Soit de plus l'application « réunion des traces »

$$\begin{aligned} \theta_{F_1 \times F_2} : Q^p(F_1) \times Q^p(F_2) &\longrightarrow Q_m^p(F_1 \cup F_2), \\ (\varphi_1, \varphi_2) &\longmapsto \varphi_1 \chi_{F_1} + \varphi_2 \chi_{F_2}, \end{aligned}$$

où χ_L est la fonction caractéristique de L , et $Q_m^p(F_1 \cup F_2)$ désigne les applications Q^p par morceaux sur F qui sont Q^p sur F_1 et F_2 . L'application $\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{K_1 \times K_2}$ correspond donc à la

trace sur F des valeurs prises à la fois sur \mathcal{K}_1 et sur \mathcal{K}_2 . L'espace \tilde{V}_h recherché vérifie alors

$$\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \left(\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2} \right) = \gamma_F^{\mathcal{K}} \left(\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}} \right) = Q^p(F) \subset Q_m^p(F_1 \cup F_2),$$

soit encore

$$\begin{cases} \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}} = Q^p(\mathcal{K}), \\ \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2} = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) \in Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2), \theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} (\varphi_1, \varphi_2) \in Q^p(F) \right\} \\ = (\gamma_F^{\mathcal{K}})^{-1}(Q^p(F)) \cap Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2). \end{cases}$$

Comme $\gamma_F^{\mathcal{K}}(V_h|_{\mathcal{K}}) = Q^p(F)$, la correction à appliquer concerne donc uniquement la partie dans $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$.

Comme précédemment, soit enfin ρ_F une application de $Q_m^p(F_1 \cup F_2)$ dans $Q_m^p(F_1 \cup F_2)$ vérifiant $Q^p(F) = \text{Ker}(\rho_F)$. On obtient ainsi le diagramme suivant :

$$Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2) \xrightarrow{\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}} Q^p(F_1) \times Q^p(F_2) \xrightarrow{\theta_{F_1 \times F_2}} Q_m^p(F_1 \cup F_2) \xrightarrow{\rho_F} Q_m^p(F_1 \cup F_2),$$

où les applications $\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ et ρ_F sont surjectives, et l'application $\theta_{F_1 \times F_2}$ est bijective. On a

Proposition 3.11 *L'application*

$$\begin{aligned} \Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} : Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2) &\longrightarrow Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2), \\ (\varphi_1, \varphi_2) &\longmapsto P_{\text{Ker}(\rho_F \circ \theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})}(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

est une projection de $Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2)$ d'image $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$.

Preuve. Montrons que $\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2)) \subset \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$:

soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2)$, on veut donc montrer que

$$(\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F)(\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2)) \in Q^p(F).$$

Par définition de ρ_F , on a $Q^p(F) = \text{Ker}(\rho_F)$, d'où la décomposition

$$Q_m^p(F_1 \cup F_2) = Q^p(F) \oplus \text{Ker}(\rho_F)^\perp. \quad (3.31)$$

De plus, en appliquant le théorème du supplémentaire orthogonal à $\text{Ker}(\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})$ dans $Q^p(\mathcal{K}_1) \times Q^p(\mathcal{K}_2)$, il vient pour φ_1 et φ_2

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1^\perp + \varphi_1^{\text{Ker}}, \varphi_2^\perp + \varphi_2^{\text{Ker}}),$$

avec $(\varphi_1^\perp, \varphi_2^\perp) \in \text{Ker}(\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})^\perp$ et $(\varphi_1^{\text{Ker}}, \varphi_2^{\text{Ker}}) \in \text{Ker}(\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})$ uniques. On déduit alors de (3.31) que

$$\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) = \theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1^\perp, \varphi_2^\perp) = \phi_p + \phi_{\text{Ker} \rho_F^\perp}, \quad (3.32)$$

où $\phi_p \in Q^p(F)$ et $\phi_{\text{Ker } \rho_F^\perp} \in \text{Ker}(\rho_F)^\perp$. En outre, la restriction de l'application $\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ à $\text{Ker}(\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})^\perp$ et à valeurs dans $Q^p(F)$ donne une bijection, donc par (3.32) il existe deux uniques couples $(\varphi_{1,p}^\perp, \varphi_{2,p}^\perp)$ et $(\varphi_{1,\text{Ker } \rho_F^\perp}^\perp, \varphi_{2,\text{Ker } \rho_F^\perp}^\perp)$ dans $\text{Ker}(\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})^\perp$ tels que

$$\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} (\varphi_{1,p}^\perp, \varphi_{2,p}^\perp) = \phi_p \text{ et } \theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F (\varphi_{1,\text{Ker } \rho_F^\perp}^\perp, \varphi_{2,\text{Ker } \rho_F^\perp}^\perp) = \phi_{\text{Ker } \rho_F^\perp}.$$

On note alors que l'on obtient la décomposition

$$\varphi_i^\perp = \varphi_{i,p}^\perp + \varphi_{i,\text{Ker } \rho_F^\perp}^\perp, \quad i = 1, 2.$$

En regroupant tous ces résultats, on en déduit l'écriture

$$\varphi_i = \varphi_i^{\text{Ker}} + \varphi_{i,p}^\perp + \varphi_{i,\text{Ker } \rho_F^\perp}^\perp, \quad i = 1, 2. \quad (3.33)$$

Finalement, comme $\text{Ker}(\rho_F \circ \theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})$ peut se décomposer comme la somme directe de $\text{Ker}(\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})$ et de $\text{Ker} \left(\rho_F \circ \theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \Big|_{(\text{Ker } \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})^\perp} \right)$, il vient

$$\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1^{\text{Ker}} + \varphi_{1,p}^\perp, \varphi_2^{\text{Ker}} + \varphi_{2,p}^\perp), \quad (3.34)$$

et donc

$$\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} (\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2)) = \theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} (\varphi_{1,p}^\perp, \varphi_{2,p}^\perp) = \phi_p \in Q^p(F).$$

Montrons que $\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ est surjective sur $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$: soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$, alors par définition $\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) \in Q^p(F)$, soit encore $\theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Ker}(\rho_F)$ d'après (3.31). Donc, en utilisant la décomposition (3.33), on en déduit que $\varphi_{i,\text{Ker } \rho_F^\perp}^\perp = 0$, $i = 1, 2$ et ainsi par (3.34) on trouve $\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \varphi_2)$, donnant ainsi un antécédent par $\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ à (φ_1, φ_2) .

Enfin, par le point précédent, on déduit directement que $(\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2})^2 = \Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$. ■

Écriture matricielle de $\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$

D'après la formule (3.30), la représentation matricielle de $\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ sera donnée par la projection sur le noyau du produit

$$[\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}] = [\rho_F][\theta_{F_1 \times F_2}][\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}].$$

Comme pour le cas de la non-conformité en p , on se place dans le cas d'une cellule $\mathcal{K} = [a, b] \times [c, d]$ avec une non-conformité en h portée sur la face $x = b$ (voir figure 3.14). Les fonctions de base sont toujours des polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux points de Gauss-Lobatto de degré p . Rappelons que, comme annoncé précédemment, la projection

$\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ n'a à être construite que sur les cellules \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 . On prendra enfin la convention de découpage $F_1 = [c, s]$ et $F_2 = [s, d]$, où le point de coordonnées (b, s) correspond donc à un nœud sur la face F .

L'application $\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ est alors représentée par la matrice

$$[\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}] = [\Phi_m(b, y_n)]_{nm} \in \mathcal{M}_{2(p+1), 2(p+1)^2},$$

où m correspond à une renumérotation des indices doubles ij des fonctions de base (3.29) en balayant successivement les fonctions de \mathcal{K}_1 puis celles de \mathcal{K}_2 (par exemple en posant $m = j + (i - 1)(p + 1)$ sur \mathcal{K}_1 puis $m = j + (i - 1)(p + 1) + (p + 1)^2$ sur \mathcal{K}_2), et $y_n = y_k^l$ avec $n = k + (l - 1)(p + 1)$ et $(y_k^l)_{k=1 \dots p+1}$ sont les points de Gauss-Lobatto d'ordre p sur les faces F_l avec $l = 1, 2$.

Remarque 3.12 La matrice $[\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}]$ est diagonale par blocs, composée de deux blocs de taille égale à $(p + 1) \times (p + 1)^2$, correspondant chacun à la trace sur F_1 et F_2 respectivement. Ces deux blocs peuvent de plus être assemblés séparément.

Si on prend comme base de $Q_m^p(F_1 \cup F_2)$ les fonctions $\left(y \mapsto \Phi_{1j}^l(b, y) \chi_{F_l}(y) \right)_{\substack{l=1,2 \\ j=1 \dots p+1}}$,

où les Φ_{ij}^l sont les fonctions de base sur \mathcal{K}_l , alors la matrice de $\theta_{F_1 \times F_2}$ est tout simplement l'identité en dimension $2(p + 1)$. En effet, $\theta_{F_1 \times F_2}$ n'est ici qu'une opération de concaténation des vecteurs des coefficients de $\varphi_1 \chi_{F_1}$ et $\varphi_2 \chi_{F_2}$, qui a déjà été faite lors de la construction de $[\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}]$.

Enfin, pour le calcul de $[\rho_F]$, nous devons utiliser un ensemble de fonctions de base de $Q^p(F)$. Plutôt que d'en construire une base particulière, nous allons utiliser l'extension des fonctions de base d'un morceau de face, par exemple F_1 , sur toute la face F , ce qui forme bien une base de $Q^p(F)$. Nous introduisons ainsi l'application $\tau_F : Q_m^p(F_1 \cup F_2) \rightarrow Q^p(F)$ qui à un polynôme par morceau $P \in Q_m^p(F_1 \cup F_2)$ associe l'unique extension de $P \chi_{F_1}$ à $Q^p(F)$. Il faut alors établir le résultat technique suivant :

Lemme 3.13 L'application $\rho_F = \text{Id} - \tau_f : Q_m^p(F_1 \cup F_2) \rightarrow Q_m^p(F_1 \cup F_2)$ vérifie $\text{Ker}(\rho_F) = Q^p(F)$.

Preuve. Tout d'abord, montrons que $Q^p(F) \subset \text{Ker}(\rho_F)$. Soit $P \in Q^p(F)$. Par unicité de l'extension à $Q^p(F)$ du polynôme $P \chi_{F_1} \in Q^p(F_1)$, on obtient $\tau_F(P) = P$. D'où $\rho_F(P) = 0$. On a alors en particulier $\dim \text{Ker}(\rho_F) \geq p + 1 = \dim Q^p(F)$.

Montrons enfin que $\dim \text{Ker}(\rho_F) \leq p + 1 = \dim Q_m^p(F_1 \cup F_2) - \dim Q^p(F)$. Soit $P \in Q^p(F_2)$. La fonction $\tilde{P} = \theta_{F_1 \times F_2}(0, P) \in Q_m^p(F_1 \times F_2)$ vérifie $\rho_F(\tilde{P}) = \tilde{P} - 0$. On en déduit donc $\text{rg}(\rho_F) \geq \dim Q^p(F_2) = p + 1$, d'où le résultat. ■

L'application τ_F admet la représentation matricielle dans $\mathcal{M}_{2(p+1)}$ suivante

$$[\tau_F]_{mn} = \begin{cases} \Phi_n(b, y_m) & \text{si } \Phi_n \text{ est une fonction de base de } Q^p(F_1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où l'expression de $[\rho_F]$ via l'identité $[\rho_F] = I - [\tau_F]$ donnée par le lemme 3.13.

La matrice de $\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ est finalement obtenue en utilisant la formule de la projection sur le noyau [65]

$$[\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}] = I_{(p+1)^2} - \left([\rho_F][\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}] \right)^+ [\rho_F][\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}].$$

3.3.3.4 Non-conformité en h et/ou p sur une face

Pour terminer, nous considérons maintenant le cas d'une cellule \mathcal{K} se raccordant de manière non-conforme en hp sur deux cellules \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 . Les ordres d'approximation dans chaque cellule sont supposés respectivement égaux à p, p_1 et p_2 . Comme précédemment, on note F la frontière du raccord sur $\partial\mathcal{K}$, et F_i la frontière correspondante sur \mathcal{K}_i . On a ainsi $F = F_1 \cup F_2$. Cette configuration est représentée sur la figure 3.15.

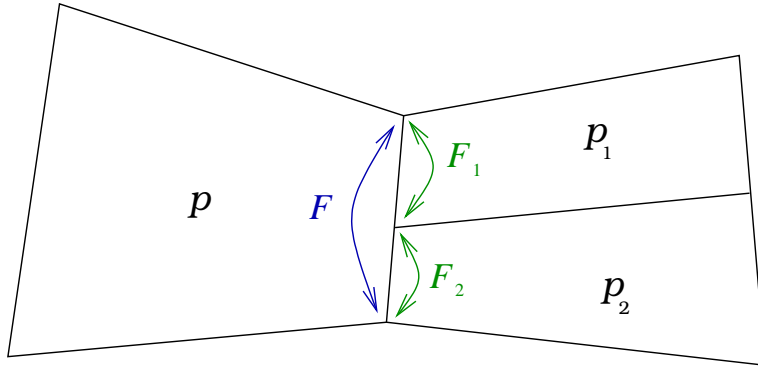


FIGURE 3.15: Configuration pour la gestion d'une non-conformité en hp .

Soit $p_{\min} = \min(p, p_1, p_2)$. Par définition, l'espace \tilde{V}_h recherché vérifie donc

$$\begin{cases} \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}} = \{ \varphi \in Q^p(\mathcal{K}), \gamma_F^{\mathcal{K}}(\varphi) \in Q^{p_{\min}}(F) \}, \\ \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2} = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) \in Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2), \theta_{F_1 \times F_2} \circ \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) \in Q^{p_{\min}}(F) \right\}. \end{cases}$$

La définition de \tilde{V}_h se découpe naturellement en deux parties : $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}}$ et $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$. Nous construisons donc l'opérateur Π_{hp} par morceaux sur ces deux ensembles.

Sur \mathcal{K} : Nous étudions alors les deux cas suivants :

1. $p \leq \min(p_1, p_2)$: alors $p_{\min} = p$ et donc $\Pi_{hp}|_{\mathcal{K}} = \text{Id}$;
2. $p > \min(p_1, p_2) = p_{\min}$: donc $\Pi_{hp}|_{\mathcal{K}}$ est donné par l'opérateur développé dans la section 3.3.3.2 :

$$\Pi_{hp}|_{\mathcal{K}} = \Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}}.$$

Sur $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$: Deux cas sont possibles :

1. $p_1 = p_2$ et $p_{\min} = p_1 = p_2$: donc $\Pi_{hp}|_{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ est donné par l'opérateur développé dans la section 3.3.3.3 :

$$\Pi_{hp}|_{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} = \Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}.$$

2. $\max(p_1, p_2) > p_{\min}$: pour simplifier, nous supposons $p_1 > p_2$, l'ordre de numérotation de \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 étant arbitraire. Nous introduisons alors les applications suivantes :
 - $\zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1}$, une injection canonique de $Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)$ dans $Q^{p_1}(\mathcal{K}_2)$,
 - $\eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2}$, une application surjective de $Q^{p_1}(\mathcal{K}_2)$ dans $Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)$ telle que $\eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2}|_{Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)} = \text{Id}$.

Il vient ainsi le résultat suivant

Proposition 3.14 *L'application $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ définie par*

$$\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} = \left(\text{I} \otimes \eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2} \right) \circ \Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \circ \left(\text{I} \otimes \zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1} \right) \circ \left(\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_1} \otimes \Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_2} \right) \quad (3.35)$$

est une projection de $Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)$ d'image $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$.

La construction du projecteur (3.35) donne le diagramme suivant :

<p>Fonctions sur $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$: $\left\{ Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2) \right\}$</p> <p>Traces sur $F_1 \times F_2$: $\left\{ Q^{p_1}(F_1) \times Q^{p_2}(F_2) \right\}$</p> $\xrightarrow{\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_1} \otimes \Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_2}} \left\{ Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2) \right\} \rightarrow \left\{ Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2) \right\}$ $\xrightarrow{\text{I} \otimes \zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1}} \left\{ Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_1}(\mathcal{K}_2) \right\} \xrightarrow{\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}} \left\{ Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_1}(\mathcal{K}_2) \right\} \xrightarrow{\text{I} \otimes \eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2}} \left\{ Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2) \right\}$ $\xrightarrow{\text{I} \otimes \zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1}} \left\{ Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2) \right\} \xrightarrow{\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}} \left\{ Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2) \right\} \xrightarrow{\text{I} \otimes \eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2}} \left\{ Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2) \right\}$
--

où $Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2)$ correspond à l'espace des fonctions (ϕ_1, ϕ_2) telles que $\theta_{F_1 \times F_2}(\phi_1, \phi_2) \in Q^{p_{\min}}(F)$. Cet espace peut également se voir comme l'image de l'application qui associe à tout polynôme $\phi \in Q^{p_{\min}}(F)$ le couple $(\phi\chi_{F_1}, \phi\chi_{F_2})$. On a ainsi, en particulier

$$Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2) \subsetneq Q^{p_{\min}}(F)|_{F_1} \times Q^{p_{\min}}(F)|_{F_2}.$$

La vérification de la non-égalité est immédiate en prenant $(\phi_1, \phi_2) \equiv (0, 1)$.

Remarque 3.15 *Il est superflu de préciser l'hypothèse $\max(p_1, p_2) > p_{\min}$ dans la proposition 3.14 car le premier cas étudié donne $p_{\min} = p_1 = p_2$ et ainsi $\zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1} = \text{Id}$, $\eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2} = \text{Id}$ et $\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_i} = \text{Id}$ sur $Q^{p_i}(\mathcal{K}_i)$ ($i = 1, 2$), ce qui permet de retrouver le projecteur $\Pi_{hp}|_{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ proposé par la formule (3.35).*

Preuve. Montrons d'abord que $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ est bien défini. Par construction de $\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_i}$, on a pour tout $(\varphi_1, \varphi_2) \in Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)$

$$\left(\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_1}(\varphi_1), \zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1} \circ \Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_2}(\varphi_2) \right) \in Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_1}(\mathcal{K}_2).$$

Donc $\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \left(\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_1}(\varphi_1), \zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1} \circ \Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_2}(\varphi_2) \right)$ est bien défini et de plus à valeurs dans $Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)$, donc $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) \in Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)$.

Montrons maintenant que l'image de $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ est $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$. Comme $p_1 > p_2 \geq p_{\min}$, on en déduit

$$Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2) \subsetneq Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2) \subsetneq Q^{p_1}(F_1) \times Q^{p_2}(F_2).$$

Les inégalités entre espaces se vérifient directement. Il est alors possible d'introduire les décompositions suivantes, toujours par le théorème du supplémentaire orthogonal

$$Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2) = Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2) \oplus (Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2))^{\perp_{p_{\min}}},$$

$$Q^{p_1}(F_1) \times Q^{p_2}(F_2) = (Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2)) \oplus (Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2))^{\perp_{12}},$$

chacun de ces espaces étant non-vide. On obtient ainsi la décomposition en somme directe finale

$$\begin{aligned} Q^{p_1}(F_1) \times Q^{p_2}(F_2) &= Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2) \oplus (Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2))^{\perp_{p_{\min}}} \\ &\quad \oplus (Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2))^{\perp_{12}}. \end{aligned}$$

Un couple (ϕ_1, ϕ_2) de fonctions surfaciques dans $Q^{p_1}(F_1) \times Q^{p_2}(F_2)$ se décompose alors de manière unique en

$$\phi_i = \phi_i^{p_{\min}} + \phi_i^{\perp_{p_{\min}}} + \phi_i^{\perp_{12}}, \quad i = 1, 2,$$

pour les couples $(\phi_1^{p_{\min}}, \phi_2^{p_{\min}}) \in Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2)$, $(\phi_1^{\perp_{p_{\min}}}, \phi_2^{\perp_{p_{\min}}}) \in (Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2))^{\perp_{p_{\min}}}$ et enfin $(\phi_1^{\perp_{12}}, \phi_2^{\perp_{12}}) \in (Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2))^{\perp_{12}}$.

Soit maintenant $(\varphi_1, \varphi_2) \in Q^{p_1}(\mathcal{K}_1) \times Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)$, alors en introduisant la décomposition $\varphi_i = \varphi_i^{\text{Ker}} + \varphi_i^{\perp}$, avec $\varphi_i^{\text{Ker}} \in \text{Ker}(\gamma_{F_i}^{\mathcal{K}_i})$ et $\varphi_i^{\perp} \in \text{Ker}(\gamma_{F_i}^{\mathcal{K}_i})^{\perp}$, on peut alors écrire la décomposition unique

$$\varphi_i = \varphi_i^{\text{Ker}} + \varphi_i^{p_{\min}} + \varphi_i^{\perp_{p_{\min}}} + \varphi_i^{\perp_{12}},$$

vérifiant

$$\gamma_{F_i}^{\mathcal{K}_i}(\varphi_i^{\text{Ker}}) = 0, \quad (i = 1, 2), \quad \gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1^{p_{\min}}, \varphi_2^{p_{\min}}) := (\phi_1^{p_{\min}}, \phi_2^{p_{\min}}) \in Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2),$$

$$\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1^{\perp_{p_{\min}}}, \varphi_2^{\perp_{p_{\min}}}) := (\phi_1^{\perp_{p_{\min}}}, \phi_2^{\perp_{p_{\min}}}) \in (Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2))^{\perp_{p_{\min}}},$$

$$\gamma_{F_i}^{\mathcal{K}_i}(\varphi_1^{\perp_{12}}, \varphi_2^{\perp_{12}}) := (\phi_1^{\perp_{12}}, \phi_2^{\perp_{12}}) \in (Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2))^{\perp_{12}}.$$

Notons, d'après les définitions des opérateurs Π_p (3.26) et Π_h (3.30), que les termes φ_i^{Ker} vérifient $\Pi_p(\varphi_i^{\text{Ker}}) = \varphi_i^{\text{Ker}}$ et $\Pi_h(\varphi_1^{\text{Ker}}, \varphi_2^{\text{Ker}}) = (\varphi_1^{\text{Ker}}, \varphi_2^{\text{Ker}})$. Il vient alors

$$\gamma_{F_1}^{\mathcal{K}_1}(\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_1}(\varphi_1)) = \phi_1^{p_{\min}} + \phi_1^{\perp_{p_{\min}}} \text{ et } \gamma_{F_2}^{\mathcal{K}_2}(\zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1} \circ \Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_2}(\varphi_2)) = \phi_2^{p_{\min}} + \phi_2^{\perp_{p_{\min}}}.$$

Comme $(\phi_1^{p_{\min}}, \phi_2^{p_{\min}}) \in Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2)$, on a naturellement l'égalité sur les traces

$$\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \left(\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1^{p_{\min}}, \varphi_2^{p_{\min}}) \right) = (\phi_1^{p_{\min}}, \phi_2^{p_{\min}}).$$

Par ailleurs, comme $Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2) \subset Q^{p_1}(F_1 \times F_2)$ est l'espace des polynômes (P_1, P_2) de degré au plus p_{\min} sur $F_1 \times F_2$ tels que $\theta_{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(P_1, P_2)$ soit un polynôme de degré au plus p_{\min} sur F , on en déduit que $Q^{p_1}(F_1 \times F_2) \cap (Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2)) = Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2)$. Sinon, il existe un polynôme $P \in Q^{p_1}(F)$ de degré strictement supérieur à p_{\min} sur F , et le couple $(P_{\chi_{F_1}}, P_{\chi_{F_2}})$ vérifie $\theta_{F_1 \times F_2}(P_{\chi_{F_1}}, P_{\chi_{F_2}}) = P$ et appartient à $Q^{p_1}(F_1 \times F_2) \cap (Q^{p_{\min}}(F_1) \times Q^{p_{\min}}(F_2))$. Il vient alors en particulier $P_{\chi_{F_1}} \in Q^{p_{\min}}(F_1)$ avec $\deg(P_{\chi_{F_1}}) > p_{\min}$ ce qui est impossible.

Ainsi, puisqu'on a par construction $(\phi_1^{\perp p_{\min}}, \phi_2^{\perp p_{\min}}) \in (Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2))^{\perp p_{\min}}$, on a donc

$$\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \left(\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \left(\varphi_1^{\perp p_{\min}}, \varphi_2^{\perp p_{\min}} \right) \right) = 0,$$

et finalement,

$$\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \left(\left(I \otimes \eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2} \right) \circ \Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} (\varphi_1, \varphi_2) \right) = (\phi_1^{p_{\min}}, \phi_2^{p_{\min}}) \in Q^{p_{\min}}(F_1 \times F_2),$$

et donc $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \left(\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2} \right) \subset \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$.

Réciproquement, soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$. Par définition, on a $\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_i}(\varphi_i) = \varphi_i, i = 1, 2$, et $\gamma_F^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) \in Q^{p_{\min}}(F)$. D'où $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \varphi_2)$, et donc toute fonction de $\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2}$ a un antécédent par $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$, d'où

$$\tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_1} \times \tilde{V}_h|_{\mathcal{K}_2} \subset \text{Im} \left(\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \right).$$

Des calculs précédents, on déduit directement que $\left(\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \right)^2 = \Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$. ■

Représentation matricielle de $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$

En reprenant les calculs donnés pour le schéma de la section 3.3.2, l'application $\zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1}$ a pour représentation matricielle :

$$\left[\zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1} \right]_{mn} = \left[\Phi_n^2(y_m^1) \right]_{mn} \in \mathcal{M}_{(p_1+1)^2, (p_2+1)^2},$$

où $(\Phi_n^2)_n$ sont les fonctions de base sur $Q^{p_2}(\mathcal{K}_2)$ et $(y_m^1)_m$ les points de Gauss-Lobatto dans $Q^{p_1}(\mathcal{K}_1)$. De même, en prenant les notations symétriques pour définir $(\Phi_n^1)_n$ et $(y_m^2)_m$:

$$\left[\eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2} \right]_{mn} = \left[\Phi_n^1(y_m^2) \right]_{mn} \in \mathcal{M}_{(p_2+1)^2, (p_1+1)^2}.$$

Le projecteur $\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2}$ admet finalement la représentation matricielle, assemblée par blocs, suivante

$$\left[\Pi_{hp}^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \right] = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \left[\eta_{\mathcal{K}_2}^{p_2} \right] \end{pmatrix} \left[\Pi_h^{\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2} \right] \begin{pmatrix} \left[\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_1} \right] & 0 \\ 0 & \left[\zeta_{\mathcal{K}_2}^{p_1} \right] \left[\Pi_{p_{\min}}^{\mathcal{K}_2} \right] \end{pmatrix}.$$

3.3.4 Points restants et corollaires

Par rapport aux résultats établis dans la section 3.3.3, nous voyons qu'il manque plusieurs cas de figures pour envisager toutes les configurations. La figure 3.16 montre deux cas de maillages cartésiens possibles que nous pouvons rencontrer. Le maillage 3.16(a) peut être géré avec les éléments de la section 3.3.3, les différentes non-conformités s'organisant de sorte que les opérateurs sont construits et les résultats démontrés assurent que la projection sera dans l'espace conforme des traces. En revanche, pour le maillage 3.16(b), les non-conformités le long de la frontière marquée en rouge sont agencées de sorte que nous n'avons pas vu la construction d'un opérateur adéquat (il faudrait assurer la composition inconditionnelle des projecteurs de type Π_{hp}).

1		1		1	
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	2		1	1
1	1			1	1
1	1	2	2	2	2
1	1	2	2	2	2
2		2		2	

(a) Cas de maillage non-conforme dont l'opérateur de correction des traces peut être défini.

1		2		3	3
				3	3
2		3		2	
2	2	2		2	
2	2			2	
2	2	2		3	
2	2			3	
2		1		1	

(b) Cas de maillage non-conforme dont l'opérateur de correction des traces n'est pas ici défini.

FIGURE 3.16: Maillages cartésiens étudiés

Les représentations matricielles sur un schéma GD particulier ont été données. Les validations numériques sur l'exemple de la section 3.3.2 présentent un problème de construction numérique. En effet, la construction du projecteur Π^a tel que défini par l'équation (3.24), pour les différents types de fonctions Π explicités, nécessitent d'assembler et de calculer une pseudo-inverse sur l'ensemble des inconnues. Ce calcul trop coûteux est actuellement un point bloquant sur lequel un travail de simplification doit être effectué.

Pour la généralisation sur un schéma GD avec maillage non structuré, il faut introduire dans les constructions des fonctions Π précédentes le passage aux éléments déformés.

Enfin, il faut noter que cette méthode peut permettre de décrire une méthode d'hybridation naturelle pour des éléments de natures différentes (Q^k/P^k par exemple) ou encore entre schémas différents (ex : les hybridations éléments finis/GD et différences finies/GD).

Stratégie de maillage auto-adaptatif

Après avoir étudié des problèmes pouvant apparaître dans l'adaptation automatique d'espace d'approximation en Galerkin discontinu (l'interpolation de condition initiale et l'utilisation d'espaces non-conformes aux chapitres 2 et 3), nous nous intéressons maintenant à l'élaboration d'une stratégie d'adaptation d'espace d'approximation dynamique. Dans les chapitres précédents, tous les exemples traités se plaçaient dans le cadre d'une adaptation d'approximation pré-définie, c'est-à-dire où l'évolution du maillage et/ou de l'ordre au cours du calcul était déterminée à l'avance. Désormais, nous souhaitons que le solveur détermine lui-même par un algorithme de recherche les raffinements et déraffinements (en h et/ou p) à faire et donc le meilleur choix d'espace d'approximation à chaque étape temporelle.

Pour cela, nous devons dans un premier temps estimer les besoins en raffinement à chaque itération temporelle, ce qui passe par la localisation et la quantification de l'erreur numérique commise par le schéma sur la solution. Nous avons donc besoin d'un estimateur d'erreur *a posteriori* pour notre problème qui permette d'évaluer le comportement de l'erreur du schéma numérique uniquement à partir des champs calculés. Après avoir donné en introduction de ce chapitre un état de l'art assez exhaustif sur la recherche de méthodes d'estimation d'erreur *a posteriori*, nous nous sommes intéressés à un estimateur d'erreur *a posteriori* développé par S. Pernet pour le système de Maxwell 3D instationnaire approximé par la méthode Galerkin discontinue présentée au chapitre 1. Il a été montré en particulier que cet estimateur satisfait aux propriétés de fiabilité et d'efficacité et donc qu'il doit donner une bonne localisation de l'erreur sur le maillage. Par anticipation sur la dernière partie de ce chapitre consacrée à l'étude de stratégies d'adaptation sur le modèle simplifié de Maxwell 1D, nous vérifierons ce bon comportement général à travers la comparaison de celui-ci avec l'erreur numérique sur un test analytique 1D.

Après l'état de l'art non exhaustif sur l'évolution des méthodes d'adaptation de maillage et leur fonctionnement donné en introduction de ce chapitre, nous mettrons en place une stratégie d'adaptation simple que nous testerons sur un cas 1D. Étant donné qu'un certain

nombre de paramètres entrent en jeu, aussi bien dans la construction de l'algorithme que dans le choix de la méthode de calcul, nous allons mener une étude paramétrique sur ceux-ci afin de déterminer dans quelle mesure le choix de ces valeurs d'entrée va influencer le calcul.

4.1 Éléments bibliographiques en relation avec l'adaptation de maillage

Dans ce paragraphe, nous donnons des éléments bibliographiques concernant les aspects suivants de l'adaptation de maillage : l'estimation *a posteriori* et les stratégies de raffinement/déraffinement. La définition d'un estimateur *a posteriori* est utilisée pour donner une information qualitative de la solution à l'issue du calcul et permet, dans le cas où il est optimal et se localise, d'évaluer les besoins de raffinement et de déraffinement (en h ou en p) d'une zone du maillage. A partir de l'information délivrée par l'estimateur *a posteriori*, il est nécessaire de décider de quelle manière vont s'opérer les raffinements et déraffinements éventuels.

4.1.1 Estimation d'erreur *a posteriori*

Le développement des estimations d'erreur *a posteriori* a commencé avec le développement de méthodes de calcul basées sur un schéma de type prédicteur-correcteur de différents ordres appliquées aux équations différentielles ordinaires de la mécanique. Chaque ordre de troncature donnait une idée de l'erreur et était ainsi utilisé pour adapter le pas de temps [7]. Les recherches dans ce domaine ont significativement évolué grâce à Babuška et Rheinboldt [10], qui ont défini des quantités explicites comme des approximations de la norme en énergie de problèmes aux limites elliptiques sur chaque maille, posant par la même occasion, entre 1978 et 1983, les bases des stratégies d'adaptation de maillage [11, 12].

De nouvelles méthodes sont apparues rapidement et présentées notamment lors d'une conférence en 1984 à Lisbonne [13]. Parmi les différentes méthodes présentées, on retiendra la méthode d'estimation de type « résiduel par élément » (*element residual method*) décrite par Demkovicz, qu'il a appliquée à de nombreux problèmes physiques [38, 39]. Parallèlement, les travaux de Bank et Wieser, menés simultanément par les deux auteurs, ont permis l'application de cette méthode d'estimation à des problèmes elliptiques scalaires en deux dimensions, ainsi qu'une analyse mathématique de celle-ci, soulignant certains phénomènes hypothétiques comme la saturation de l'estimation [14].

Dans la même période, toujours sous l'impulsion de Demkovicz, des estimateurs d'erreur dits *ad hoc* ont été développés en vue d'être appliqués pour l'adaptation de maillage dans le cadre de la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides [21, 80]. Ces estimateurs, basés sur des méthodes *a priori* ou d'interpolation, ont permis de calculer efficacement les solutions dans le cas de fluides non-visqueux avec des phénomènes de choc, de discontinuités ou de raréfaction, mais ont aussi montré leurs limites pour des cas plus compliqués, comme des problèmes de couche limite ou d'interactions entre couches limites et ondes de choc.

En plus des estimations de résidu de Demkovicz, d'autres méthodes d'estimations ont été développées, comme les estimateurs dits par « méthode de recouvrement » (*recovery-based method*). L'une des méthodes les plus connues est celle de type ZZ, acronyme de Zienkiewicz et Zhu, qui donne des estimateurs simples et efficaces pour une classe bien définie de problèmes approximatés par des méthodes éléments finis. Les estimateurs de type ZZ entrent dans la catégorie des estimateurs par « méthode de recouvrement » où l'estimateur est calculé à partir d'un lissage du gradient de la solution numérique et comparé au gradient de la solution exacte [99, 77, 63]. Cette méthode a ensuite été améliorée en utilisant des propriétés de superconvergence des approximations (*superconvergent patch recovery method*) [96].

Les années 1980 ont donc vu le développement de nombreuses techniques d'estimation *a posteriori*, mais ce n'est qu'à partir de la décennie suivante qu'elles ont été étudiées du point de vue des classes de problèmes, car jusqu'alors, l'estimation était étudiée au cas par cas. Les travaux de Verfürth ont ainsi permis d'obtenir un estimateur dérivé de l'erreur et borné pour le problème de Stokes et les équations de Navier-Stokes [93, 94]. Baranger et El-Amri ont publié des travaux sur des méthodes de calcul explicite du résidu de l'erreur pour une vaste classes de problèmes aux limites, incluant des problèmes non-linéaires [17]. Enfin, plusieurs estimateurs ont été écrits pour la résolution de problèmes elliptiques par des éléments finis mixtes [22, 27, 28], d'autres pour des problèmes paraboliques et hyperboliques [55]. Une analyse d'erreur *a posteriori* pour les problèmes de transport et de convection-diffusion est donnée dans [55].

Dans le cadre de notre thèse, nous nous intéressons à un problème hyperbolique approché par une méthode de type Galerkin discontinue. Dans ce contexte, la bibliographie reste peu fournie. Toutefois, des estimations ont été développées sur les problèmes hyperboliques [32, 33, 50, 59, 64] et de diffusion [58, 95], et on peut également citer les travaux d'Adjerid sur l'estimation *a posteriori* superconvergente pour des méthodes Galerkin discontinues 1D et 2D [3, 2, 4].

L'estimation *a posteriori* pour le système de Maxwell a essentiellement été menée dans le domaine fréquentiel [56, 57, 31, 69] ou pour des problèmes coercifs [89, 29]. Les quelques résultats obtenus dans une étude temporelle n'existent que pour des modèles particuliers [66, 53]. En conclusion de la bibliographie que j'ai menée, les travaux existants sur des estimateurs *a posteriori* pour le problème de Maxwell temporel sont pratiquement inexistantes.

4.1.2 Adaptation de maillage

Les différents travaux menés sur l'adaptation de maillage ont un lien important avec le développement d'estimateurs d'erreur *a posteriori*. Comme nous l'avons vu dans la bibliographie effectuée, les recherches récentes visent à étudier la possibilité d'adapter l'espace d'approximation dans le cadre de classes de problèmes. Dans le contexte Maxwell instationnaire, peu d'études ont été faites et nous nous sommes intéressés aux recherches d'Adler *et al.* [5] menées sur les méthodes de raffinement pour la résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre.

Dans une stratégie de maillage auto-adaptatif, l'idée directrice est simple et consiste

en la répartition uniforme de l'erreur sur chacune des cellules. Les premiers travaux sont menés par Gui et Babuška [47, 48, 49], qui démontrent que cet objectif est faisable, puis donnent une méthode basique, encore aujourd'hui à la base de nombreux algorithmes [98]. Cette méthode, appelée « stratégie de marquage par seuil » (*threshold-based marking strategy*) consiste à construire un sous-ensemble de cellules du maillage à partir des valeurs d'un estimateur d'erreur, en considérant les cellules où l'erreur est la plus importante à hauteur d'un paramètre σ_{raf} , représentant le pourcentage de cellules qui peuvent être raffinées sur une itération de l'algorithme.

Cette stratégie, simple de compréhension et d'application, repose néanmoins sur le choix de la valeur du paramètre définissant le seuil, qui reste à choisir au cas par cas. En effet, Morin, Nochetto et Siebert [72, 73] pointent des résultats indiquant que le choix du paramètre de seuil dépend du problème de départ, notamment de la régularité de la condition initiale, et qu'il semble envisageable de changer la valeur de σ_{raf} à chaque itération. Ils proposent également d'affiner la recherche du maillage optimal en donnant deux alternatives : prendre peu de cellules si l'erreur est « localisée », ou raffiner globalement si elle est répartie quasi-uniformément.

Après la question de la localisation des cellules dont on doit modifier l'espace d'approximation associé vient la question de la détermination du nouvel espace d'approximation. Pour cela, plusieurs quantités sont à définir pour évaluer le coût du raffinement et dépendent directement de la valeur seuil σ_{raf} (précisées dans [91]). Parmi elles, on retiendra la réduction de l'erreur, notée $\gamma(\sigma_{\text{raf}}) \in [0; 1]$, et le gain sur le nombre de degrés de liberté, noté $\delta(\sigma_{\text{raf}}) \in [0; 2^d]$, $d \in \mathbb{N}$.

De là, deux méthodes ont été proposées, afin d'adapter la valeur seuil :

- les méthodes de raffinement WEE (« *work-times-error-reduction* » *efficiency factor*), où le domaine de raffinement est caractérisé par σ_{raf} définissant le pourcentage de cellules à raffiner, tel que :

$$\sigma_{\text{raf}} = \arg \min_{r \in [0;1]} \delta(r) \sqrt{\gamma(r)}.$$

Ces méthodes se montrent peu intéressantes pour les ordres élevés.

- les méthodes de raffinement ACE (« *accuracy-per-computational-cost* » *efficiency factor*), suggérées par John Ruge [5], où le nombre de cellules à raffiner est donné par un pourcentage σ_{raf} des cellules du domaine tel que :

$$\sigma_{\text{raf}} = \arg \min_{r \in [0;1]} \frac{\log(\gamma(r))}{\delta(r)}.$$

Par ailleurs, les méthodes de recalcul de la solution après modification du maillage ont été améliorées et affinées toujours dans l'idée de ne pas entraîner un surcoût dans l'algorithme d'adaptation. On pourra citer, par exemple, les méthodes par itération imbriquée (*nested iteration*, raffinement local) avec augmentation fixée du nombre de degrés de liberté et l'algorithme de minimisation de calcul par anticipation (« *anticipated-overall-computational-work* » *efficiency factor*). Dans ces stratégies, l'interpolation se fait par des méthodes de moindres carrés liées au schéma et à l'énergie de la solution (voir aussi [19, 86] pour d'autres domaines d'applications). On peut aussi trouver d'autres stratégies de localisation et recalcul dans la bibliographie, qui est relativement vaste à ce sujet [24, 79, 54, 5].

Dans les approches d'adaptation, on peut également mentionner les méthodes dites

goal-oriented, développées en particulier par Demkovicz [79, 78] pour la résolution du système de Maxwell 2D dans le domaine fréquentiel en utilisant un schéma éléments finis. Parmi celles-ci, on ne cherche pas à minimiser l'erreur sur l'ensemble du domaine de calcul mais plutôt une forme linéaire de la solution (le *goal*) qui définit la quantité d'intérêt du calcul. Cela mène alors à une majoration de l'erreur commise sur ce *goal* par le produit de la norme de l'erreur du système à résoudre et de celle d'un système adjoint construit à partir de la fonction objectif. La stratégie *goal-oriented* consiste ainsi à minimiser conjointement les erreurs sur ces deux systèmes en ne choisissant que les zones produisant une quantité d'erreur importante pour les deux équations à la fois. Par cette méthode on obtient donc une meilleure localisation des degrés de liberté et une convergence exponentielle du processus auto-adaptatif vers la solution. Toutefois, cette méthode ne semble pas *a priori* aussi intéressante pour le cas instationnaire car il faudrait alors effectuer plusieurs cycles de résolution problème direct / problème adjoint et engendrer ainsi des coûts de calculs énormes.

4.2 Estimation *a posteriori* de l'erreur numérique

Dans cette section nous commençons par donner l'estimateur *a posteriori* pour le schéma GD3D (1.21) établi dans [82, 83] dont nous rappelons très brièvement certains résultats. Dans un second temps, afin de pouvoir tester sur un exemple simplifié 1D différentes pistes de stratégies d'adaptation, nous écrivons l'estimateur correspondant pour le schéma GD1D (2.6) que nous validons numériquement sur quelques exemples.

4.2.1 Estimateur d'erreur *a posteriori* utilisé pour le schéma GD3D

Nous rappelons les travaux récents de S. Pernet [82, 83] sur la construction d'un estimateur d'erreur *a posteriori* explicite simple de type résiduel construit pour le schéma GD3D. L'estimateur η considéré s'écrit, pour tous $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in V_h \times V_h$:

$$\eta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sqrt{\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \eta_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)^2},$$

avec la quantité locale définie à l'aide des notations des chapitres 1 et 2 :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \eta_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)^2 &= h_{\mathcal{K}}^2 \|f - \bar{\varepsilon} \mathbf{u}_h + \nabla \times \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{K}}^2 + h_{\mathcal{K}}^2 \|g - \bar{\mu} \mathbf{v}_h - \nabla \times \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{K}}^2 \\ &+ h_{\mathcal{K}} \left\| \llbracket \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \right\|_{\partial \mathcal{K}}^2 + h_{\mathcal{K}} \left\| \llbracket \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \right\|_{\partial \mathcal{K}}^2 \\ &+ h_{\mathcal{K}}^2 \left\| \bar{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot (f - \bar{\varepsilon} \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathcal{K}}^2 + h_{\mathcal{K}}^2 \left\| \bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot (g - \bar{\mu} \mathbf{v}_h) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \\ &+ \frac{h_{\mathcal{K}}}{2} \left\| \bar{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \llbracket (f - \bar{\varepsilon} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \right\|_{\partial \mathcal{K}}^2 + \frac{h_{\mathcal{K}}}{2} \left\| \bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \llbracket (g - \bar{\mu} \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\partial \mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \right\|_{\partial \mathcal{K}}^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

où f et g désignent les termes sources.

Cet estimateur sera calculé après chaque itération à partir des valeurs des champs numériques évalués à l'itération temporelle précédente. Ainsi, dans l'expression (4.1), à l'itération n , nous identifions le couple $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ aux champs $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}})$ et les termes sources (f, g) à $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ avec les éventuelles valeurs de $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}$.

Remarque 4.1 De manière générale, il est souhaité de définir l'estimateur de façon locale, soit par morceaux sur chaque cellule du maillage, soit sur chaque nœud de calcul. Toutefois, le cadre de cette thèse impose cette propriété à travers le schéma GD utilisé, lui-même défini cellule à cellule, ainsi l'estimateur sera défini localement au niveau de la cellule.

Il faut noter que l'estimateur proposé par S. Pernet dans le cadre du projet DIGA-TOP [82, 83] est construit à partir d'un schéma GD pour résoudre les équations de Maxwell statiques. En effet, en notant (\mathbf{E}, \mathbf{H}) la solution continue du problème de Maxwell et $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)$ son approximation numérique à une étape n quelconque donnée, il utilise la majoration suivante

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - (\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)\| &\leq \|(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - (\mathbf{u}, \mathbf{v})\| + \|(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)\| \\ &= \|(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - (\mathbf{u}, \mathbf{v})\| + \|(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\|, \end{aligned}$$

où $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ est la solution numérique associée à un problème de Maxwell statique, de solution continue notée (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , telle que $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)$. L'estimateur statique η permet alors de contrôler le terme $\|(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\|$, mais on montre aussi qu'il majore la quantité $\|(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - (\mathbf{u}, \mathbf{v})\|$ [82]. Une illustration de ce principe est donnée par la figure 4.1.

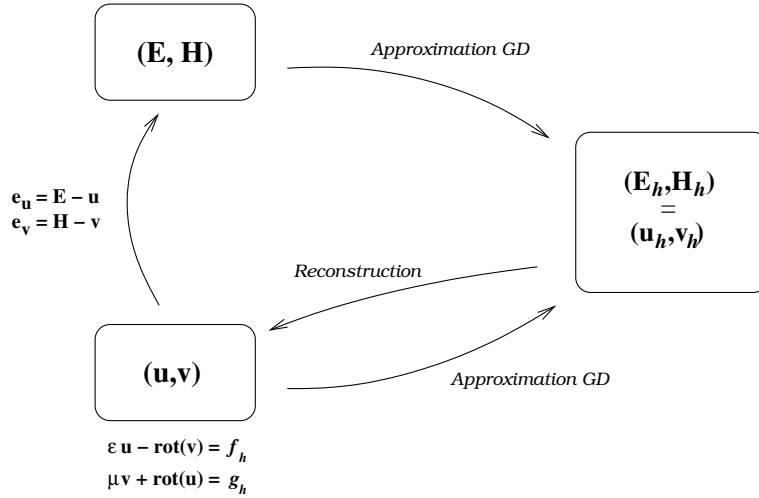


FIGURE 4.1: Principe de la construction de l'estimateur d'erreur pour le problème de Maxwell temporel.

Il a fallu également s'assurer que cet estimateur satisfasse des conditions de fiabilité et d'efficacité. Pour cela, nous devons prouver qu'il existe deux fonctions ν_1, ν_2 , négligeables devant $\eta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ et $\|(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\|$ et telles que :

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\| \leq C_f \eta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \nu_1 \quad (\text{fiabilité}), \quad (4.2)$$

$$\eta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \leq C_e \|(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\| + \nu_2 \quad (\text{efficacité}), \quad (4.3)$$

où C_f et C_e sont des constantes positives indépendantes des paramètres de discrétisation.

La première inégalité permet d'assurer que la fonction η joue bien le rôle d'estimateur *a posteriori* dans le sens où si on diminue la valeur de η (en raffinant en h ou en p) alors on diminue aussi la valeur de l'erreur. L'ajout de la seconde inégalité permet alors d'affirmer

que les comportements de l'erreur et de l'estimateur sont équivalents. Ce dernier peut ainsi être utilisé dans le cas de tests en déraffinement (si, pour une erreur obtenue, on déraffine en h ou p et que la valeur de l'estimateur ne varie pas alors c'est qu'il en est globalement de même pour l'erreur et donc que le déraffinement peut être effectué).

Pour déterminer cet estimateur d'erreur *a posteriori* pour le schéma Galerkin discontinu (1.21) par la technique des résidus, la construction tient en trois étapes classiques :

1. Introduction d'approximations « continues » de \mathbf{u}_h et \mathbf{v}_h .

Pour cela, deux opérateurs de reconstruction continues $R_h : V_h \rightarrow V_h \cap \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ et $R_{h,0} : V_h \rightarrow V_h \cap \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ sont introduits. Ainsi, en posant $\bar{\mathbf{u}}_h = R_{h,0}\mathbf{u}_h$ et $\bar{\mathbf{v}}_h = R_h\mathbf{v}_h$, nous pouvons décomposer l'erreur sous la forme :

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_h = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h) - (\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h) \text{ et } \mathbf{v} - \mathbf{v}_h = (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_h) - (\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_h).$$

2. Décomposition de Helmholtz des résidus $\mathbf{e}_u = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{e}_v = (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_h) \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$.

Cette étape permet d'écrire la norme du résidu sous la forme de la somme de deux normes de vecteurs orthogonaux, qui peuvent être traitées séparément.

3. Majoration des différents termes de la décomposition de Helmholtz par des termes ne dépendant que de la solution numérique.

Ce sont les différents termes de majoration qui donnent à la fois la forme de l'estimateur d'erreur *a posteriori* η et le résultat final de majoration montrant la fiabilité de l'estimateur. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 4.2 (Fiabilité de l'estimateur [82]) *Supposons les hypothèses suivantes sur le maillage \mathcal{T}_h vérifiées :*

- *sur tout élément \mathcal{K} du maillage, le ratio $\frac{h_{\mathcal{K}}}{\rho_{\mathcal{K}}}$ est majoré par une constante indépendante de \mathcal{K} ; le paramètre $h_{\mathcal{K}}$ est le diamètre de \mathcal{K} et $\rho_{\mathcal{K}}$ est le diamètre de la plus grande boule inscrite dans \mathcal{K} ;*
- *le maillage est conforme : il y a coïncidence des arêtes dans l'ensemble du maillage.*

Soient $\bar{\mathbf{u}}_h$ et $\bar{\mathbf{v}}_h$ les reconstructions continues des champs discrets, respectivement de \mathbf{u}_h sur $V_h \cap \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ et de \mathbf{v}_h sur $V_h \cap \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Alors, il existe une constante $C_f > 0$ indépendante de h telle que :

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \right\|^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \right\|^2 &\leq C_f \eta^2 + \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h) \right\|^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_h) \right\|^2 \\ &+ \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} (f - f_h) \right\|^2 + \left\| \mu^{\frac{1}{2}} (g - g_h) \right\|^2 + \|\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h\|^2 + \|\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_h\|^2, \end{aligned}$$

où f_h et g_h sont les projections L^2 des termes sources f et g .

En ce qui concerne l'efficacité de l'estimateur, nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.3 (Efficacité de l'estimateur [83]) *Soit $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$. Il existe une constante $C_e > 0$ indépendante de $h_{\mathcal{K}}$ telle qu'on ait les majorations suivantes*

1. pour les termes volumiques $\mathbf{H}(\text{rot})$:

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{K}} \|\mathbf{r}_{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{K}} &\leq C_e \left\| \bar{\bar{\mu}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \right\|_{\mathcal{K}} + h_{\mathcal{K}} \left(\left\| \bar{\bar{\varepsilon}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathcal{K}} + \|\mathbf{r}_{\mathbf{u}} - \mathbf{r}_{\mathbf{u},h}\|_{\mathcal{K}} \right), \\ h_{\mathcal{K}} \|\mathbf{r}_{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{K}} &\leq C_e \left\| \bar{\bar{\varepsilon}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathcal{K}} + h_{\mathcal{K}} \left(\left\| \bar{\bar{\mu}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \right\|_{\mathcal{K}} + \|\mathbf{r}_{\mathbf{v}} - \mathbf{r}_{\mathbf{v},h}\|_{\mathcal{K}} \right), \end{aligned}$$

où $\mathbf{r}_{\mathbf{u}} = \bar{\bar{\varepsilon}}^{-\frac{1}{2}} (f - \bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{u}_h + \nabla \times \mathbf{v}_h)$, $\mathbf{r}_{\mathbf{v}} = \bar{\bar{\mu}}^{-\frac{1}{2}} (g - \bar{\bar{\mu}} \mathbf{v}_h - \nabla \times \mathbf{u}_h)$ et $\mathbf{r}_{\mathbf{u},h}$ et $\mathbf{r}_{\mathbf{v},h}$ désignent leurs projections L^2 respectives sur V_h ,

2. pour les termes $\mathbf{H}(\text{div})$:

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{K}} \left\| \bar{\bar{\varepsilon}}^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot (f_h - \bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathcal{K}} &\leq C_e \left\| \bar{\bar{\varepsilon}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathcal{K}} + h_{\mathcal{K}} \left\| \bar{\bar{\varepsilon}}^{-\frac{1}{2}} (f - f_h) \right\|_{\mathcal{K}}, \\ h_{\mathcal{K}} \left\| \bar{\bar{\mu}}^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot (g_h - \bar{\bar{\mu}} \mathbf{v}_h) \right\|_{\mathcal{K}} &\leq C_e \left\| \bar{\bar{\mu}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \right\|_{\mathcal{K}} + h_{\mathcal{K}} \left\| \bar{\bar{\mu}}^{-\frac{1}{2}} (g - g_h) \right\|_{\mathcal{K}}, \end{aligned}$$

3. et enfin pour les termes de trace : pour toute cellule $\mathcal{K}' \in \mathcal{T}_h$ telle que $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \emptyset$ et $\partial \mathcal{K} \cap \partial \mathcal{K}' = \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{h_{\Gamma}} \left\| \llbracket \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} \rrbracket_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \right\|_{\Gamma} &\leq C_e \sum_{\mathcal{T} \in \{\mathcal{K}, \mathcal{K}'\}} \left(\left\| \bar{\bar{\varepsilon}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \right\|_{\mathcal{T}} + h_{\Gamma} \left\| \bar{\bar{\mu}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \right\|_{\mathcal{T}} + h_{\mathcal{T}} \|\mathbf{r}_{\mathbf{v},h} - \mathbf{r}_{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}} \right), \\ \sqrt{h_{\Gamma}} \left\| \llbracket \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \rrbracket_{\Gamma}^{\mathcal{K}} \right\|_{\Gamma} &\leq C_e \sum_{\mathcal{T} \in \{\mathcal{K}, \mathcal{K}'\}} \left(\left\| \bar{\bar{\mu}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \right\|_{\mathcal{T}} + h_{\Gamma} \left\| \bar{\bar{\varepsilon}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \right\|_{\mathcal{T}} + h_{\mathcal{T}} \|\mathbf{r}_{\mathbf{u},h} - \mathbf{r}_{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}} \right). \end{aligned}$$

La démonstration repose sur le contrôle des différents termes de l'estimateur par la technique des fonctions-bulles de Verfürth.

Nous remarquons que les théorèmes précédents donnent que les quantités négligeables ν_1 et ν_2 correspondent ici aux résidus de projection L^2 des termes sources et aux erreurs d'interpolation dues aux opérateurs de reconstruction.

4.2.2 Validation de l'estimateur pour le problème dynamique sur un cas simplifié 1D

Comme annoncé au début de la section, nous allons tester les différentes stratégies de raffinement/déraffinement sur le modèle simplifié des équations de Maxwell en 1D (2.1). Nous aurons donc besoin d'un estimateur *a posteriori* pour le schéma GD1D (2.6). La section précédente nous a permis de donner un estimateur *a posteriori* pour le système de Maxwell 3D en temps à partir d'un estimateur défini sur un problème statique. Il a été montré qu'il était fiable et efficace et qu'il permettait donc d'approcher correctement le comportement de l'erreur. Nous allons donc écrire l'estimateur correspondant pour le schéma GD1D et effectuer les validations dans ce cas afin de mesurer la pertinence de ce résultat sur le problème de Maxwell 1D (2.1) pour simplifier les calculs.

Estimateur *a posteriori* pour le système de Maxwell 1D

En reprenant le schéma GD1D défini dans le chapitre 2, la construction de l'estimateur d'erreur *a posteriori* pour celui-ci est similaire à celle de l'estimateur 3D (4.1). Nous trouvons alors l'estimateur d'erreur *a posteriori* défini cellule par cellule suivant :

$$\begin{aligned}
 \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, (\eta_{\mathcal{K}})^2 = & h_{\mathcal{K}}^2 \|f - \varepsilon u_h - \partial_x v\|_{\mathcal{K}}^2 + h_{\mathcal{K}}^2 \|g - \mu v_h - \partial_x u_h\|_{\mathcal{K}}^2 \\
 & + h_{\mathcal{K}} \sum_{x \in \partial \mathcal{K}} \left(\left\| \llbracket u_h \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right\|_{\partial \mathcal{K}}^2 + \left\| \llbracket v_h \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right\|_{\partial \mathcal{K}}^2 \right) \\
 & + h_{\mathcal{K}}^2 \left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_x (f - \varepsilon u_h) \right\|_{\mathcal{K}}^2 + h_{\mathcal{K}}^2 \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x (g - \mu v_h) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \\
 & + \frac{h_{\mathcal{K}}}{2} \sum_{x \in \partial \mathcal{K}} \left(\left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \llbracket \mathbf{n}_x (f - \varepsilon u_h) \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right\|_{\partial \mathcal{K}}^2 + \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \llbracket \mathbf{n}_x (g - \mu v_h) \rrbracket_x^{\mathcal{K}} \right\|_{\partial \mathcal{K}}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Cas test étudié

Nous validons maintenant cet estimateur *a posteriori* par un test de comparaison avec l'erreur quadratique exacte sur le problème de Maxwell 1D, pour lequel nous avons une expression analytique de la solution exacte. Pour cela, nous considérons le problème sur le domaine $\Omega = [0, 3]$, et observons la propagation du terme source :

$$E_0(x) = \exp\left(\frac{100}{9}\right) \exp\left(-[(x-1)(1.6-x)]^{-1}\right) \mathbb{1}_{[1,1.6]}(x), \quad H_0(x) = 0.$$

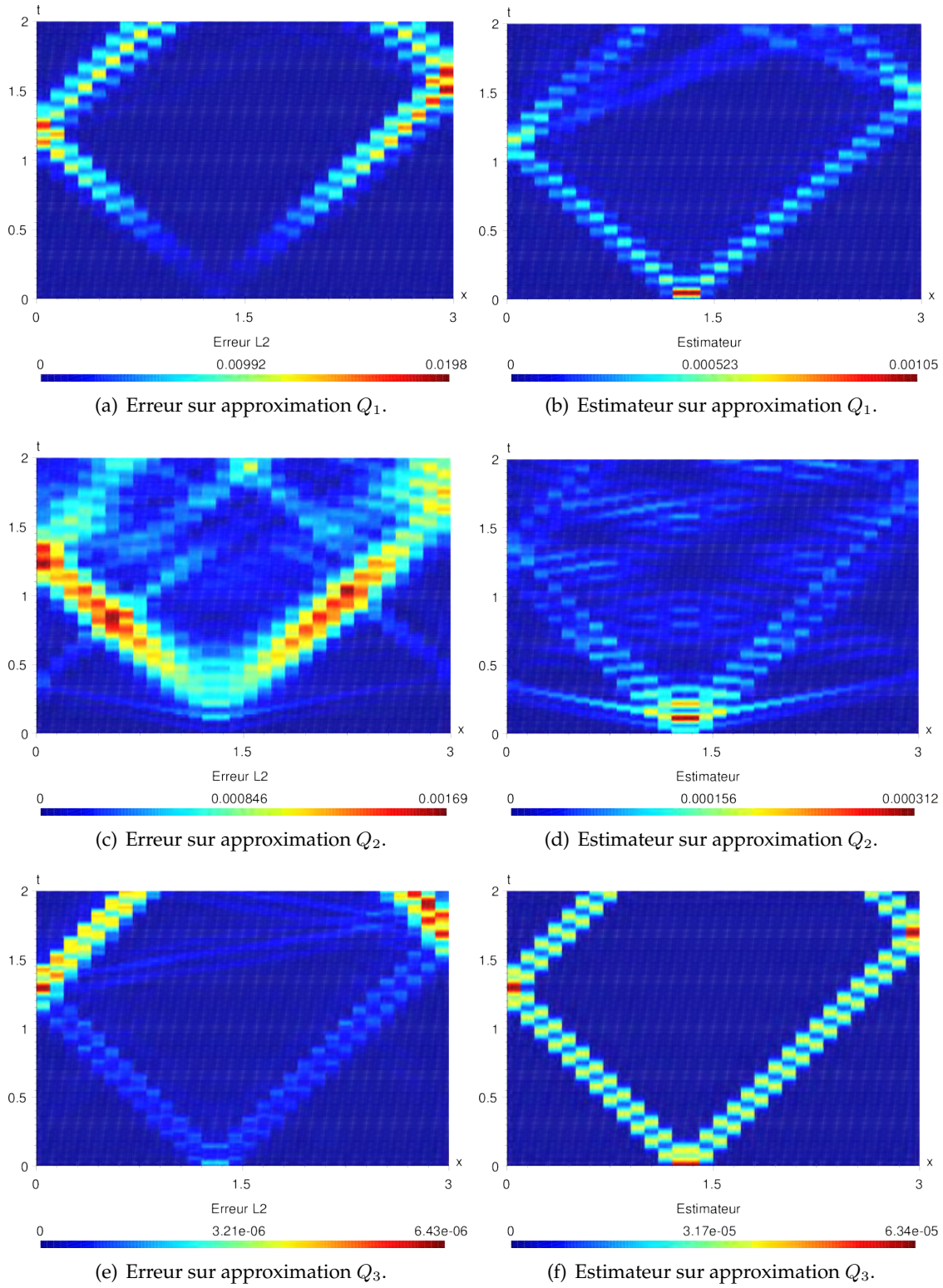
Ce terme source présente la particularité d'être de classe \mathcal{C}^∞ et d'être à support compact. Nous pouvons ainsi connaître précisément le support de son cône de propagation et donc repérer les éventuelles erreurs de dissipation. Le domaine est borné par des conditions métalliques ($\mathbf{n}_x E|_{\partial \Omega} = 0$). La solution exacte est alors donnée par (2.13).

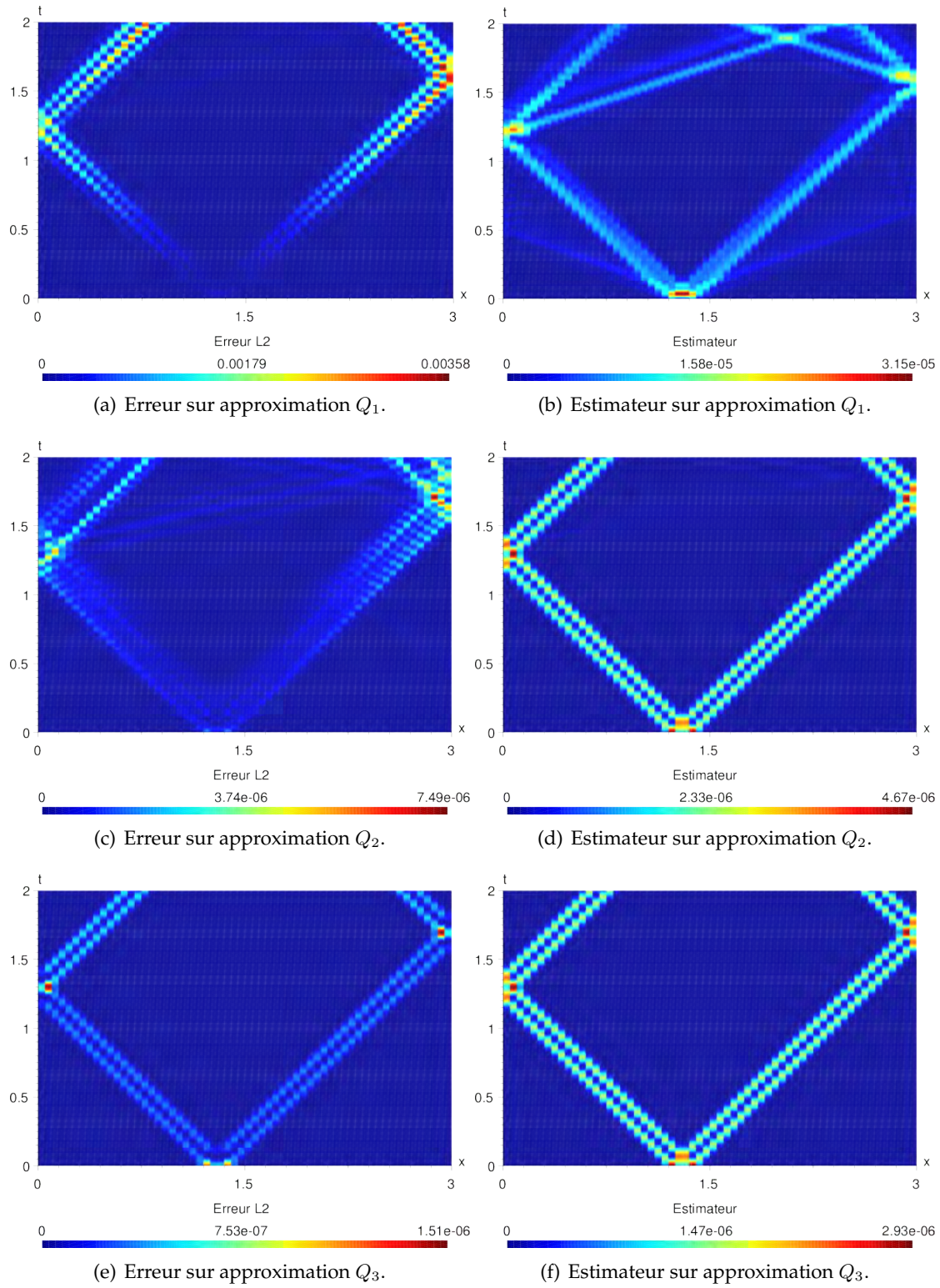
Pour pouvoir valider l'estimateur, nous allons effectuer deux séries de tests : une pour des flux centrés et l'autre pour des flux complètement décentrés ($\lambda = 0.3$). La motivation vient de la différence de comportement du schéma GD1D dans ces deux cas : conservatif pour les flux centrés et dissipatifs (effet stabilisant) pour les flux décentrés.

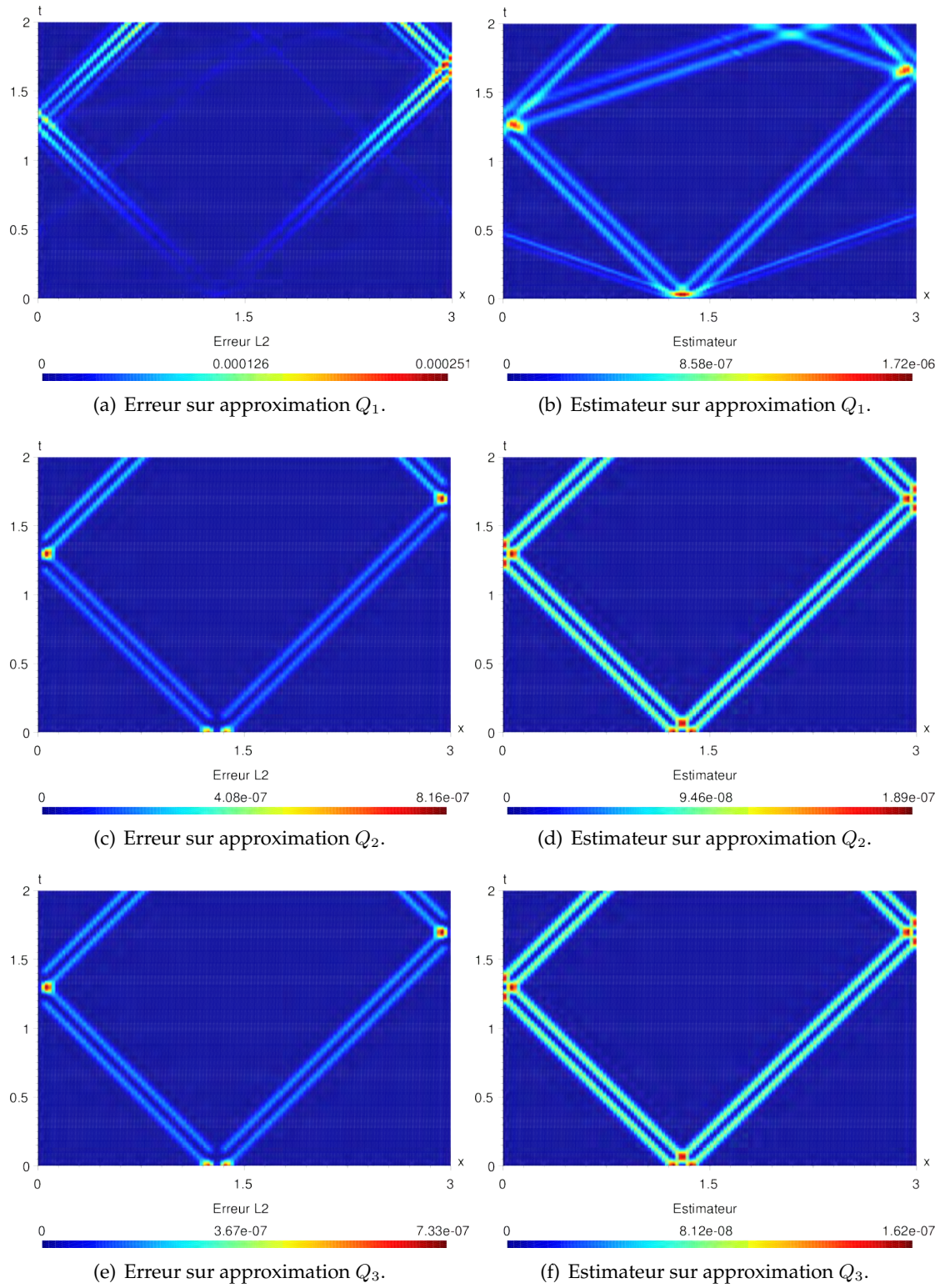
Résultats numériques pour le schéma GD centré

Les figures 4.2, 4.3 et 4.4 montrent la comparaison entre les valeurs de l'erreur de projection et l'estimateur d'erreur *a posteriori*, cellule par cellule, sur différents maillages (pas et ordre différents). Le pas de temps sera fixé à $\Delta t = 1.e-3$, afin de ne pas prendre en compte l'erreur induite par l'interpolation en temps.

La figure 4.2, et plus particulièrement les calculs en Q_1 et Q_2 (figures 4.2(a) à 4.2(d)), permet de voir le comportement de η dans le cas où nous avons un pas d'espace trop grand ou

FIGURE 4.2: Comparaisons estimateur / erreur pour un calcul en flux centrés ($h = 0.1$).

FIGURE 4.3: Comparaisons estimateur / erreur pour un calcul en flux centrés ($h = 5.e - 2$).

FIGURE 4.4: Comparaisons estimateur / erreur pour un calcul en flux centrés ($h = 25.e - 3$).

une approximation trop faible pour approcher correctement la solution du problème physique. Nous pouvons observer que les valeurs de l'estimateur *a posteriori* diminuent au cours du temps alors que celles de l'erreur L^2 augmentent. Ceci peut se comprendre en observant la formule (4.4) car les valeurs de η sont obtenues à partir de u_h et v_h qui sont les solutions numériques évaluées par le calcul. Ainsi, dans le cas d'un maillage trop grossier et d'un ordre trop faible, la solution numérique tendant vers zéro par effet de la dissipation, η décroît donc lui-aussi. Ce phénomène s'explique aussi par la construction de l'estimateur *a posteriori* effectuée par identification d'un problème statique. Dans ce cas, la dissipation numérique induit automatiquement une perte d'information entre les différentes itérations du calcul et donc le problème statique considéré est résolu à partir de valeurs plus faibles que celles attendues pour retrouver un comportement en amplitude proche de celui de l'erreur L^2 . On peut toutefois noter que le support de η suit globalement celui de l'erreur, induisant une bonne localisation des zones pas assez précises (et donc de leur traitement par la suite) dans le domaine de calcul. De plus, lors de la montée en ordre (en particulier avec les figures 4.2(e) et 4.2(f)) nous observons une amélioration du comportement de l'estimateur ce qui va de pair avec une meilleure précision sur la solution (erreur L^2 maximale de $\approx 6.4e-6$ en Q_3 , pour $\approx 1.7e-3$ en Q_2).

Les figures 4.3 et 4.4 confortent ces remarques sur des maillages plus précis. Dans ces cas pour des ordres d'approximation supérieurs à 2, nous voyons que l'estimateur est très satisfaisant, car il suit l'erreur sur la solution. Dans le cas de l'approximation Q_1 , il faut souligner qu'alors l'ordre de convergence de notre schéma Galerkin discontinu en flux centrés est très faible [84]. La limitation du bon comportement de l'estimateur à un maillage ou un ordre assez fin est par ailleurs cohérente avec les démonstrations des résultats de fiabilité et d'efficacité qui ne sont obtenues que dans un cas asymptotique en $h^p \rightarrow 0$ (soit $h \rightarrow 0$ et/ou $p \rightarrow \infty$).

On note par ailleurs que sur plusieurs cas, des ondes « parasites » apparaissent avec une caractéristique deux fois plus importante que celle donnée par la vitesse de la lumière dans le milieu. Ceci est particulièrement visible sur les courbes d'erreur 4.2(c)-4.2(e)-4.3(c) et sur les courbes d'estimateurs 4.2(d)-4.3(b)-4.4(b). Nous supposons que ces phénomènes correspondent à des « spurious modes », c'est-à-dire des ondes parasites développées par le schéma numérique, telles qu'elles peuvent être observées sur le schéma éléments finis d'ordres élevés avec quadrature de Gauss [34], le schéma GD avec flux centrés étant proche de ce dernier. Ces modes sont généralement évanescents et les ondes parasites observées ici semblent elles-mêmes décroître rapidement. Enfin, l'estimateur *a posteriori* calculant des dérivées de la solution numérique, ces termes ayant été vus numériquement comme contributions prépondérantes pour ces ondes parasites, cela semble expliquer pourquoi leur support est plus marqué dans les courbes de η que dans celles de l'erreur. Nous avons par ailleurs pu observer le même phénomène, toujours sur bas ordre, avec d'autres types de conditions initiales (gaussienne, fonction chapeau).

Nous en concluons que sur un maillage et une approximation correcte par rapport aux phénomènes physiques recherchés, dans le cas des flux centrés, l'estimateur permet un bon suivi de la propagation de l'erreur. Nous notons cependant que les niveaux de valeurs entre l'estimateur et l'erreur ne sont pas similaires, voire différentes de plusieurs ordres selon les maillages utilisés. Cette remarque s'explique par le fait que les inégalités d'efficacité et de fiabilité introduisent des constantes de majoration difficilement quantifiables et donc po-

tentiellement importantes. Toutefois, ce ne sont pas les valeurs précises de l'estimateur qui nous intéressent pour l'adaptation de maillage, mais la position de ses maxima, qui eux expriment bien la localisation des erreurs les plus importantes induites par le schéma numérique.

Résultats numériques pour le schéma GD décentré

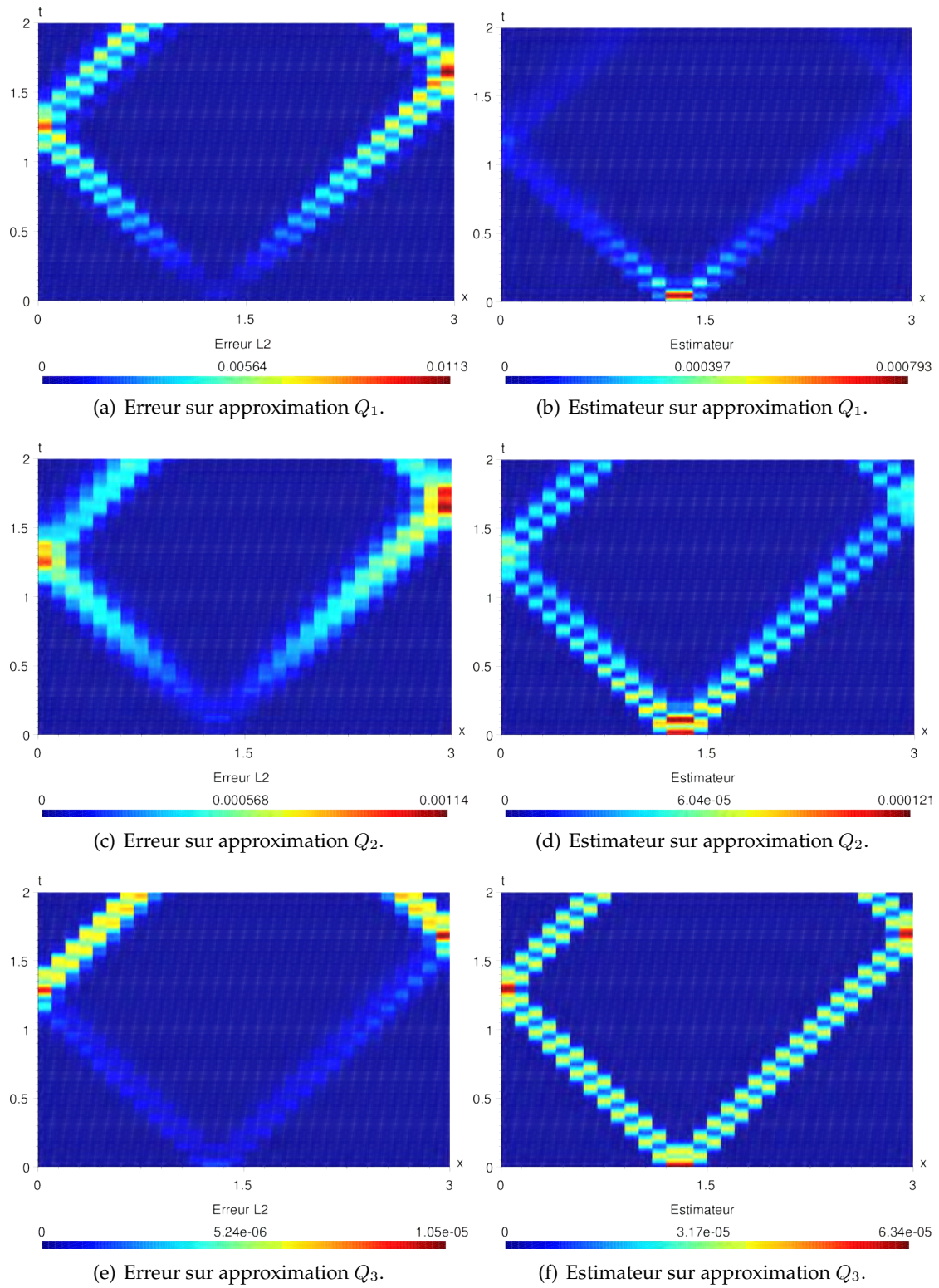
L'estimateur *a posteriori*, tel qu'il a été présenté précédemment, est construit dans le cas d'un schéma GD avec des flux centrés. Nous sommes toutefois intéressés à l'étude des méthodes d'adaptation dans le contexte d'applications où, pour des contraintes de stabilité, nous utilisons généralement des flux décentrés. Nous décidons donc d'essayer de vérifier le bon comportement de l'estimateur dans le cas des flux décentrés. Nous reprenons donc les exemples de calcul vus précédemment en ajoutant un décentrement pour $\lambda = 0.3$, où λ est le paramètre de pénalisation vu au chapitre 1. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 4.5, 4.6 et 4.7.

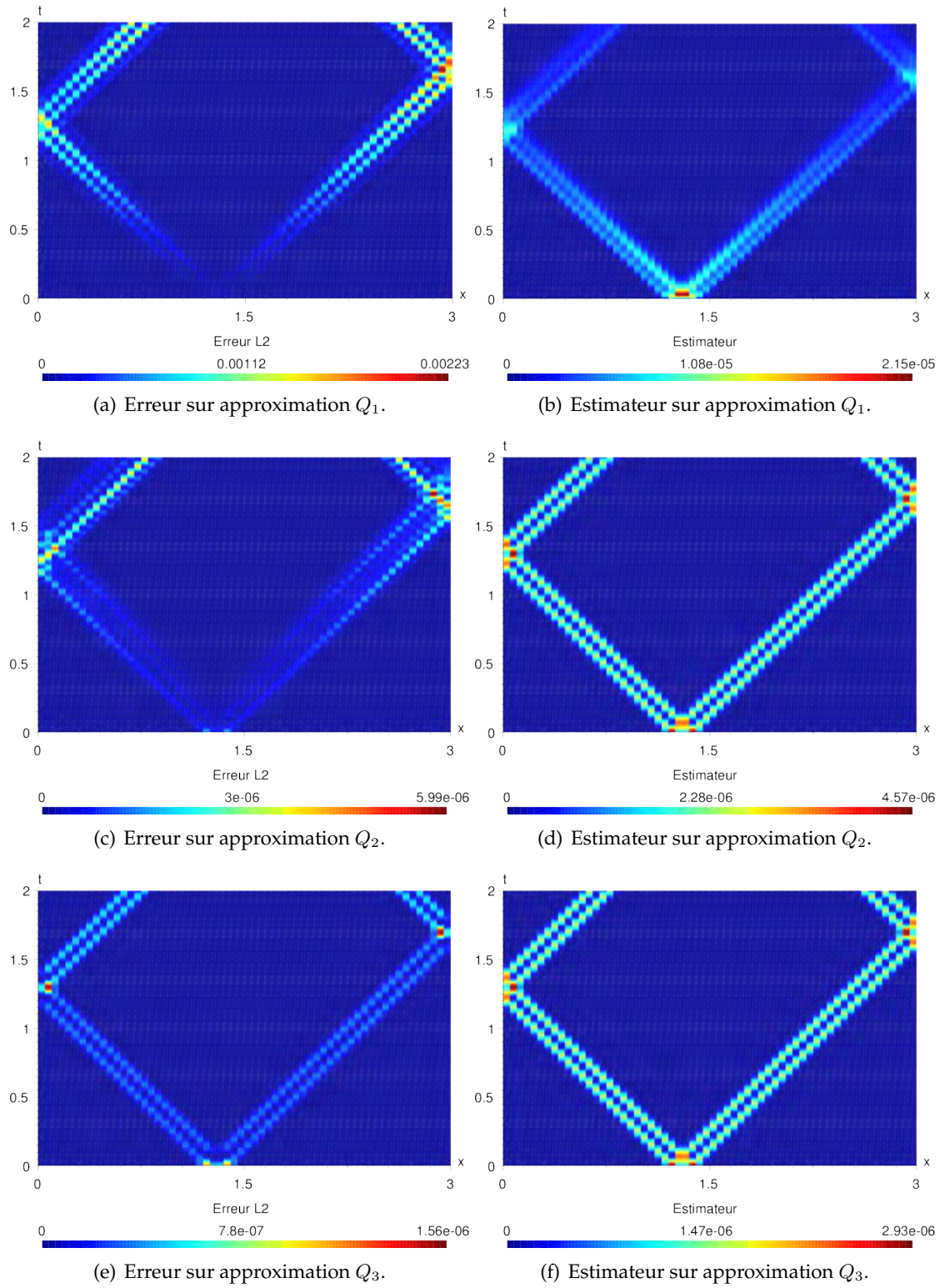
Une fois encore, l'estimateur permet un bon suivi de l'erreur dans la plupart des cas présentés pour des pas de maillage ou des ordres assez fins. Nous observons aussi des résultats sur le comportement de l'estimateur par rapport à la solution meilleurs que dans le cas des flux centrés. En effet, on peut avoir des maillages plus grossiers et on ne voit plus alors la mise en avant d'ondes parasites dans le cas Q_1 . Ceci peut s'expliquer par un déplacement du spectre de l'opérateur discrétisé lié à l'introduction du décentrement des flux, et donc un déplacement des modes parasites éventuels. Enfin, on peut noter une amélioration des résultats pour le cas Q_1 car, dans ce cas, le schéma Galerkin discontinu présente théoriquement un meilleur ordre de convergence.

Dans les différentes études numériques menées, nous pouvons donc conclure que l'estimateur (4.4) proposé convient comme localisation des zones de raffinement/déraffinement pour une méthode auto-adaptative basée sur notre schéma Galerkin discontinu en flux centrés ou décentrés. Toutefois, nous devons partir dans la méthode d'auto-adaptativité d'un maillage initial suffisamment fin pour tenir compte correctement du spectre de la solution du problème lié aux sources injectées.

4.3 Évaluation d'une stratégie d'adaptation de maillage

Dans cette section, nous allons étudier et mettre en application un algorithme d'adaptation de maillage. Nous commencerons donc avec un algorithme basique de raffinement et déraffinement de maillage, basé sur une « stratégie de marquage par seuil », avant d'envisager différentes options visant à obtenir un maillage adapté et satisfaisant au niveau du comportement de l'erreur.

FIGURE 4.5: Comparaisons estimateur / erreur pour un calcul en flux décentrés ($h = 0.1$).

FIGURE 4.6: Comparaisons estimateur / erreur pour un calcul en flux décentrés ($h = 5.e-2$).

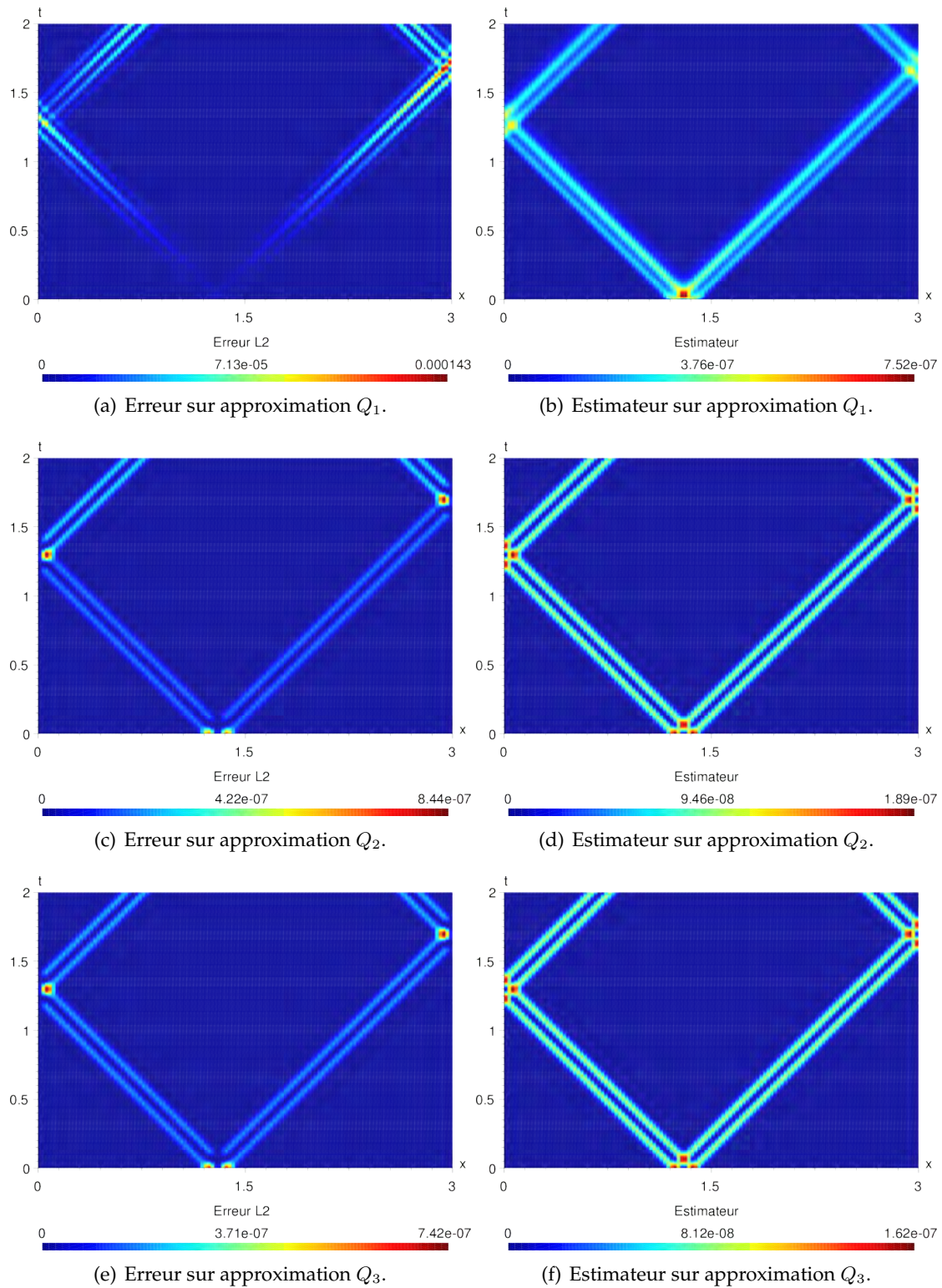


FIGURE 4.7: Comparaisons estimateur / erreur pour un calcul en flux décentrés ($h = 25.e - 3$).

4.3.1 Éléments de références

Afin de tester différentes stratégies d'adaptation de maillage, nous nous donnons préalablement un cas test qui sera le même pour l'ensemble de l'étude. Nous considérons le domaine $\Omega = [0; 3]$ avec conditions aux bords métalliques et observons l'évolution jusqu'au temps $T = 5$ de la solution du problème (2.1) avec pour condition initiale un gaussien centré en $x = 1$ et d'écart-type 0.5. L'allure générale de cette solution est donnée par la figure 4.8.

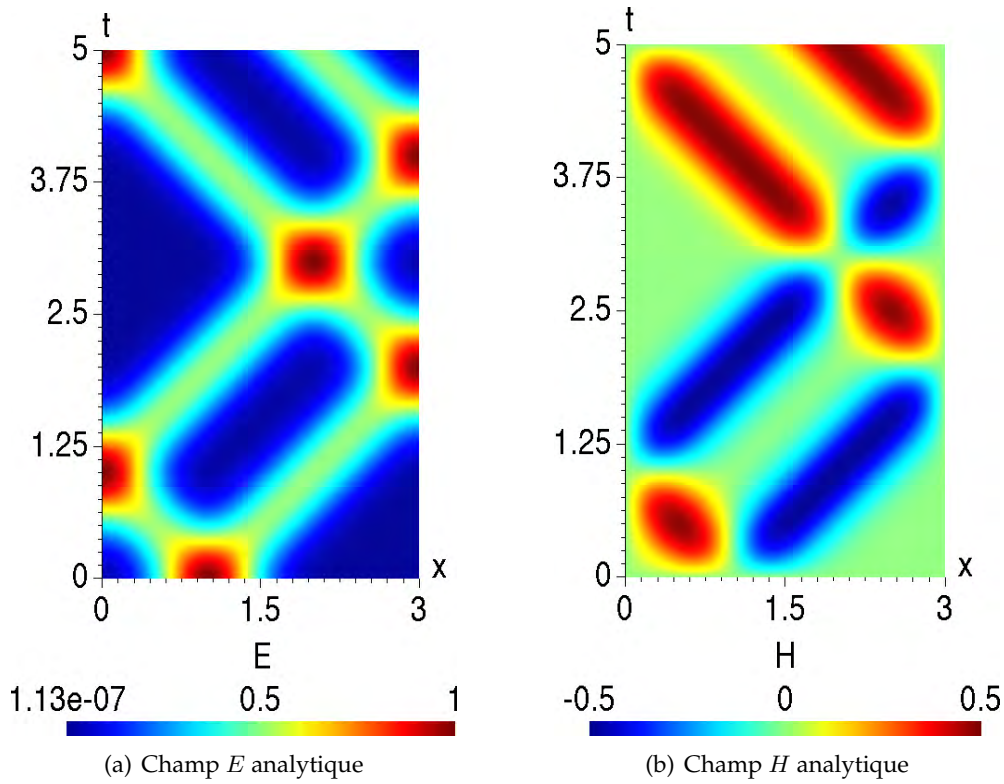


FIGURE 4.8: Valeurs analytiques du champ électromagnétique 1D.

Pour nous donner un ordre de comparaison pour la suite avec une stratégie d'adaptation de maillage, nous reportons les performances des calculs sur différents maillages fixes, en répertoriant les temps CPU, le nombre d'inconnues et l'erreur au temps final pour un pas de temps $\Delta t = 1.e - 5$ assurant la stabilité de tous les cas envisagés. Ces performances sont données dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3.

En regardant les valeurs de l'erreur numérique sur ces tableaux, nous constatons plusieurs éléments. Tout d'abord, il y a un gain important à utiliser l'ordre 2 par rapport à l'ordre 1. Ce gain étant réparti plus régulièrement sur les montées aux ordres suivants (3 et 4). Ceci peut s'expliquer par l'utilisation de maillages éventuellement trop gros pour approximer correctement la condition initiale en Q_1 (≈ 3 mailles pour $h = 0.2$). Cette infor-

TABLE 4.1: Résultats numériques sur calculs en flux centrés.

		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
$h = 0.2$	t_{CPU} avec estimateur	16.26	17.68	18.96	20.53
	t_{CPU} sans estimateur	13.27	13.94	14.64	15.44
	Inconnues	30	45	60	75
	Erreur	8.997e-3	2.288e-5	1.473e-6	4.018e-7
$h = 0.1$	t_{CPU} avec estimateur	22.90	24.83	27.86	31.01
	t_{CPU} sans estimateur	17.39	18.51	20.24	21.88
	Inconnues	60	90	120	150
	Erreur	1.336e-3	1.585e-6	1.776e-7	8.234e-8
$h = 0.05$	t_{CPU} avec estimateur	34.91	39.15	43.48	48.89
	t_{CPU} sans estimateur	25.67	27.31	28.92	31.76
	Inconnues	120	180	240	300
	Erreur	3.142e-4	2.126e-7	2.761e-8	2.052e-8
$h = 0.025$	t_{CPU} avec estimateur	60.02	67.43	75.94	86.46
	t_{CPU} sans estimateur	42.24	45.24	48.22	52.89
	Inconnues	240	360	480	600
	Erreur	8.268e-5	3.945e-8	8.690e-9	7.582e-9

TABLE 4.2: Résultats numériques sur calculs en flux décentrés ($\lambda = 1$).

		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
$h = 0.2$	t_{CPU} avec estimateur	16.27	17.77	19.14	20.53
	t_{CPU} sans estimateur	13.29	14.01	14.70	15.54
	Inconnues	30	45	60	75
	Erreur	1.757e-3	3.123e-5	7.983e-7	2.524e-7
$h = 0.1$	t_{CPU} avec estimateur	22.78	25.18	27.97	31.18
	t_{CPU} sans estimateur	17.62	18.58	20.33	21.69
	Inconnues	60	90	120	150
	Erreur	1.286e-4	8.071e-7	1.248e-7	7.082e-8
$h = 0.05$	t_{CPU} avec estimateur	35.43	39.62	44.25	49.22
	t_{CPU} sans estimateur	25.97	27.59	29.40	31.83
	Inconnues	120	180	240	300
	Erreur	1.139e-5	1.280 e-7	1.194e-7	1.156e-7
$h = 0.025$	t_{CPU} avec estimateur	60.70	68.47	77.69	87.82
	t_{CPU} sans estimateur	42.82	45.93	49.56	53.27
	Inconnues	240	360	480	600
	Erreur	7.307e-7	2.362e-7	2.869e-7	2.485e-7

TABLE 4.3: Résultats numériques sur calculs en flux partiellement décentrés ($\lambda = 0.3$).

		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
$h = 0.2$	t_{CPU} avec estimateur	16.27	17.79	19.09	20.62
	t_{CPU} sans estimateur	13.33	13.94	14.70	15.72
	Inconnues	30	45	60	75
	Erreur	2.595e-3	1.817e-5	6.074e-7	2.139e-7
$h = 0.1$	t_{CPU} avec estimateur	22.90	25.23	28.09	31.34
	t_{CPU} sans estimateur	17.51	18.35	20.09	22.03
	Inconnues	60	90	120	150
	Erreur	3.220e-4	6.144e-7	7.517e-8	4.914e-8
$h = 0.05$	t_{CPU} avec estimateur	35.53	39.77	44.13	49.53
	t_{CPU} sans estimateur	25.87	27.79	28.88	31.91
	Inconnues	120	180	240	300
	Erreur	3.905e-5	8.568e-8	5.039e-8	4.735e-8
$h = 0.025$	t_{CPU} avec estimateur	60.75	68.85	77.06	87.64
	t_{CPU} sans estimateur	42.20	45.41	49.04	53.40
	Inconnues	240	360	480	600
	Erreur	3.643e-6	8.306e-8	9.474e-8	1.105e-7

mation perdue dès la première itération ne permet pas d'obtenir une erreur au temps final comparable à celles obtenues pour les autres cas.

Par ailleurs, dans le cas centré, nous observons un phénomène de super-convergence du schéma avec les fonctions Q_1 (ordre de convergence ≈ 3). Cette propriété est *a priori* liée à l'utilisation ici d'un maillage régulier à pas fixe, de la même manière qu'elle peut s'observer en éléments finis. Cette propriété se lisse avec l'augmentation en ordre.

Enfin, on constate sur tous ces tableaux un phénomène de saturation de l'erreur proche de $1e - 8$ dans les cas centrés et de $1e - 7$ pour les schémas décentrés. Cette saturation est *a priori* liée au choix du schéma en temps (*leap-frog*) pour le pas Δt fixé. Le décentrement dans le schéma GD se traduisant par l'introduction de termes dissipatifs, il est alors naturel que cette erreur maximale augmente avec le coefficient de décentrement λ .

Concernant les temps de calculs, au regard des résultats obtenus sans l'estimateur nous avons une croissance prévisible avec l'ordre (le nombre d'inconnues augmente avec l'ordre pour un maillage fixé) et avec le raffinement du maillage. D'autre part, nous notons sur ces cas que l'évaluation de l'estimateur *a posteriori* (à chaque itération en temps) représente un coût assez important, allant d'environ 30% à 80% selon l'ordre (pour $Q_1 \approx 30\%$, $Q_2 - Q_3 \approx 50\%$ et $Q_4 \approx 50-80\%$). Cette évolution semble liée à l'augmentation quadratique des coûts des termes de norme L^2 et semi-norme H^1 dans l'estimateur, qui sont comparativement négligeables à bas ordre.

4.3.2 Mise en œuvre d'un algorithme d'adaptation de maillage

Nous allons introduire un algorithme simple de raffinement et déraffinement de maillage dynamique. Il se base sur une lecture directe des valeurs locales de l'estimateur *a posteriori* η sur chaque cellule, afin d'en déduire, selon les seuils fixés par l'opérateur un dé-

coupage de la cellule ou un recollement de celle-ci avec une de ces voisines. Pour ce faire, nous associons, pour chaque cellule $\mathcal{K}_i \in \mathcal{T}_h$ (notation définie dans le chapitre 1), la valeur de l'estimateur (4.4) sur celle-ci ; la valeur sera notée $\eta_{\mathcal{K}_i}$. Une fois l'ensemble des valeurs $(\eta_{\mathcal{K}_i})_{1 \leq i \leq N}$ calculées, nous devons réordonner celles-ci par ordre décroissant et nous supposons dans la suite que ces valeurs sont toujours rangées ainsi. Nous noterons également $\eta = \left(\sum_{i=1}^N \eta_{\mathcal{K}_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ la valeur de l'estimateur d'erreur sur le maillage complet, et η_{\max} le seuil de raffinement.

Mise en place de l'algorithme et boucles de recalcul

Au cours du calcul, nous avons à un instant donné l'ensemble des estimations d'erreur sur chaque cellule. Afin de déterminer lesquelles seront à raffiner ou déraffiner, nous posons deux paramètres, notés $\sigma_{\text{raf}} \in]0; 1[$ et $\epsilon_{\text{deraf}} > 0$, correspondant respectivement à la proportion de cellules à raffiner, et à l'erreur maximale autorisée sur une cellule afin de la considérer comme à déraffiner. L'ensemble des cellules à raffiner sera donc l'ensemble des P_{raf} cellules $\{\eta_{\mathcal{K}_i}\}_{1 \leq i \leq P_{\text{raf}}}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{P_{\text{raf}}} \eta_{\mathcal{K}_i}^2 \leq \sigma_{\text{raf}} \eta^2,$$

tandis que l'ensemble des cellules à déraffiner $\{\eta_{\mathcal{K}_i}\}_{i \in \{P_{\text{deraf}}, \dots, N\}}$ sera constitué des $(N - P_{\text{deraf}} + 1)$ cellules telles que $\forall i = P_{\text{deraf}}, \dots, N, \eta_{\mathcal{K}_i}^2 \leq \epsilon_{\text{deraf}}$.

L'algorithme d'adaptation de maillage basique fonctionne de façon itérative tant que l'objectif $\eta \leq \eta_{\max}$ fixé sur l'erreur n'est pas atteint. Le fonctionnement de cet algorithme, intégrant le projecteur de condition initiale Π du chapitre 2, est précisé dans le pseudocode 1.

On remarque que dans l'algorithme d'adaptation, si le paramètre ϵ_{deraf} est choisi nul, aucun déraffinement ne sera marqué, et l'algorithme d'adaptation sera un simple algorithme de raffinement de maillage. Cet algorithme peut donc, selon le choix de paramètres d'entrée, être utilisé pour le raffinement seul ou pour le raffinement et déraffinement de maillage.

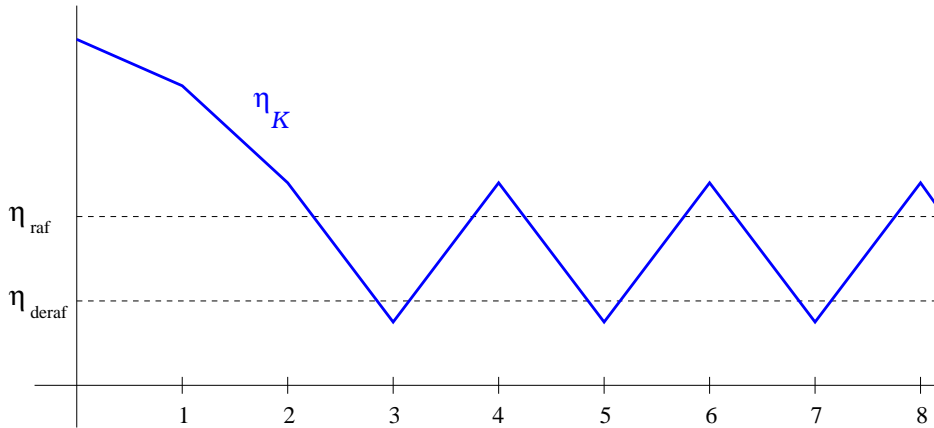


FIGURE 4.9: Oscillation de l'estimation sur une cellule \mathcal{K} .

```

Input :  $\eta_{\max} > 0, \epsilon_{\text{deraf}} \geq 0, 0 < \sigma_{\text{raf}} < 1$ 
Evaluer la condition initiale sur le maillage étudié  $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \leftarrow (\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ 
Initialiser  $\eta = 2\eta_{\max}$ 
while  $\eta > \eta_{\max}$  do
    Calcul des champs  $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}})$  à partir de  $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ 
    Calcul des  $\{\eta_{\mathcal{K}_i}\}_i$  et de  $\eta$  à partir des champs  $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$  et  $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ 
    if  $\eta > \eta_{\max}$  then
        Tri des valeurs  $\{\eta_{\mathcal{K}_i}\}_i, P \leftarrow 1, S \leftarrow \eta_{\mathcal{K}_1}^2$ 
        while  $S < \sigma_{\text{raf}}\eta^2$  do
             $P \leftarrow P + 1, S \leftarrow S + \eta_{\mathcal{K}_P}^2$ 
        end
        Raffiner les cellules  $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_P)$ 
         $p \leftarrow N$ 
        while  $\eta_{\mathcal{K}_p} < \epsilon_{\text{deraf}}$  do
            Déraffiner  $\mathcal{K}_p$ 
             $p \leftarrow p - 1$ 
        end
        Construire  $\Pi$  à partir des nouvelles approximations sur les cellules  $\{\mathcal{K}_i\}$ 
         $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \leftarrow \Pi(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ 
    end
end

```

Algorithme 1 : Pseudo-code de l'algorithme générique d'adaptation de maillage.

Tel que nous l'avons conçu, l'algorithme 1 pourrait présenter un risque de boucle infinie. En effet, suivant le jeu de paramètres d'entrée, il est possible d'obtenir sur une cellule \mathcal{K} , pour un temps donné, un comportement de l'estimateur $\eta_{\mathcal{K}}$ donné par la figure 4.9. Au fur et à mesure des raffinements, la valeur $\eta_{\mathcal{K}}$ va décroître jusqu'à être proche de deux valeurs critiques : la valeur minimale η_{raf} qu'elle doit atteindre pour ne plus avoir à être raffinée, et la valeur maximale $\eta_{\text{deraf}} = \epsilon_{\text{deraf}} \times \eta_{\max}$ qu'elle peut prendre pour être considérée comme inutilement raffinée. On détermine alors l'état de la cellule, à savoir marquée à raffiner ou déraffiner, selon les valeurs de $\eta_{\mathcal{K}}$. Sans contrôle sur le positionnement de ces états, le risque que l'estimateur n'entre jamais dans la bande critique $[\eta_{\text{deraf}}, \eta_{\text{raf}}]$ conduira à un phénomène d'hystérésis alternant entre raffinement et déraffinement.

Ainsi, nous introduisons dans notre algorithme deux compteurs qui permettent de limiter ces oscillations et donc d'assurer un calcul en temps fini. Pour cela, nous fixons dans nos calculs le nombre de boucles de l'algorithme de raffinement par itération temporelle à 50 (premier compteur) et nous introduisons également pour chaque cellule, un nombre maximum de déraffinements à 10 par itération (second compteur). Ce choix permet de privilégier le maillage le plus fin et donc la précision. Si nous avions défini le second compteur sur le nombre de marquages « à raffiner », nous aurions privilégié le maillage le plus grossier, et donc le plus susceptible de créer de l'erreur.

Localisation du recalcul

L'algorithme de raffinement de maillage 1 implique de recalculer la solution à chaque itération de la boucle de test de raffinements/déraffinements sur l'ensemble du domaine de calcul, ce qui a un coût certain. Or, par construction, le schéma Galerkin discontinu est local à chaque cellule : *ie*, les supports des fonctions de base sont limités à une cellule. On voit donc que pour le calcul des valeurs des inconnues dans une cellule donnée, il n'y a besoin que de l'information des cellules adjacentes (pour les termes de flux). De plus, le problème de Maxwell est un problème hyperbolique en temps et, par le principe de Huygens, la valeur de la solution en une zone \mathcal{O} de l'espace et au temps t donnés ne modifie donc au plus la connaissance en un temps $t' > t$ quelconque de l'inconnue que sur la zone

$$\mathcal{O}' = \{x / \exists y \in \mathcal{O}, \|x - y\| \leq c(t' - t)\},$$

définie par le support de la convolution de la solution élémentaire de l'équation des ondes (partie principale de l'opérateur de Maxwell). En particulier, dans le cas 3D en espace libre où le principe de Huygens fort s'applique, on peut se restreindre à l'information sur $\partial\mathcal{O}'$.

En revenant au schéma et en utilisant la localisation des inconnues GD et le principe de Huygens, nous voyons que les inconnues d'une cellule \mathcal{K} donnée au temps t^n n'influencent au temps t^{n+1} que la cellule \mathcal{K} et celles qui lui sont adjacentes car par, la condition CFL du schéma, nous avons $c\Delta t < h$, où h est le pas du maillage, comme illustré sur la figure 4.10.

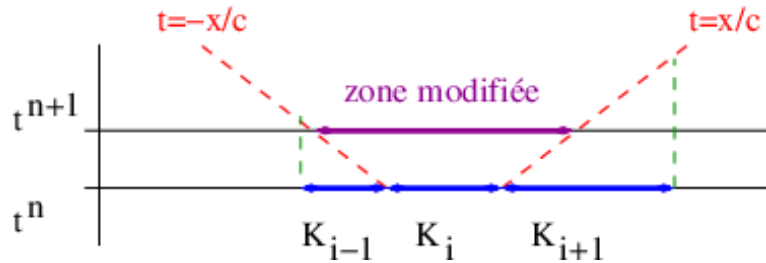


FIGURE 4.10: Principe de localisation du recalcul de la solution.

Dans une boucle de test, pour déterminer le meilleur espace d'approximation pour le calcul de la solution au temps t^{n+1} à partir des valeurs au temps t^n , en revenant à l'algorithme 1 nous avons déjà effectué un premier calcul de $(E^{n+1}, H^{n+\frac{3}{2}})$. Par utilisation de l'estimateur *a posteriori* nous avons alors marqué des cellules à raffiner ou déraffiner et nous devons maintenant recalculer $(E^{n+1}, H^{n+\frac{3}{2}})$ sur ce nouvel espace. Ainsi, par le principe de Huygens, nous en déduisons que ces modifications ne vont pas induire de changement de $(E^{n+1}, H^{n+\frac{3}{2}})$ sur les cellules situées au-delà du voisinage direct de celles marquées à raffiner ou à déraffiner. Comme illustré dans la figure 4.11, nous n'effectuons donc de recalcul de $(E^{n+1}, H^{n+\frac{3}{2}})$ que sur les cellules marquées et leurs voisines directes.

De plus, en revenant à la construction de l'estimateur *a posteriori* (4.4), nous pouvons observer que si les valeurs de $(E^{n+1}, H^{n+\frac{3}{2}})$ ne sont changées que localement, alors seuls les termes $\eta_{\mathcal{K}}$ correspondants sont modifiés. Ainsi, dans l'utilisation de l'estimateur *a posteriori*, nous utiliserons la même stratégie de localisation du recalcul. Plus précisément, les

calculs des termes η_K se décomposent en deux groupes : les parties évaluées uniquement à l'intérieur de K

$$h_K^2 \|f - \varepsilon u_h - \partial_x v\|_K^2 + h_K^2 \|g - \mu v_h - \partial_x u_h\|_K^2 \\ + h_K^2 \left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_x (f - \varepsilon u_h) \right\|_K^2 + h_K^2 \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \partial_x (g - \mu v_h) \right\|_K^2,$$

et celles qui nécessitent des informations venant d'autres cellules

$$h_K \sum_{x \in \partial K} \left(\left\| \llbracket u_h \rrbracket_x^K \right\|_{\partial K}^2 + \left\| \llbracket v_h \rrbracket_x^K \right\|_{\partial K}^2 \right) \\ + \frac{h_K}{2} \sum_{x \in \partial K} \left(\left\| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \llbracket \mathbf{n}_x (f - \varepsilon u_h) \rrbracket_x^K \right\|_{\partial K}^2 + \left\| \mu^{-\frac{1}{2}} \llbracket \mathbf{n}_x (g - \mu v_h) \rrbracket_x^K \right\|_{\partial K}^2 \right).$$

Nous voyons sur ces derniers qu'ils ne nécessitent que l'information des cellules adjacentes à K . Donc, si les valeurs de $(E^{n+1}, H^{n+\frac{3}{2}})$ sont modifiées dans la cellule K , cela affecte les valeurs de η_K et des $\eta_{K'}$ pour $K \cap K' \neq \emptyset$. Finalement, les seules cellules sur lesquelles nous allons recalculer l'estimateur correspondent à celles déjà marquées à recalculer pour les champs, comme illustré sur la figure 4.11.

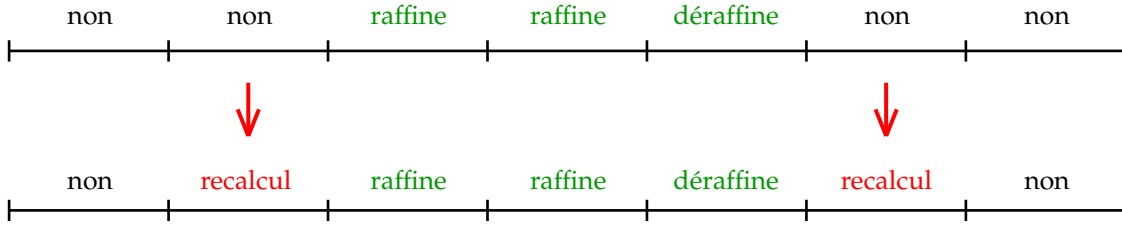


FIGURE 4.11: Procédure de recalcul : résultat du marquage par estimateur (haut) et ajout des éléments supplémentaires à recalculer (bas).

Nous voyons immédiatement l'intérêt de cette option de recalcul local, qui nous permet d'alléger les étapes de recalcul de la solution après interpolation et donc de gagner du temps dans le processus itératif, en particulier sur le calcul de l'estimateur *a posteriori* au vu du surcoût qu'il engendrait pour les résultats de référence dans la section 4.3.1. L'algorithme d'adaptation de maillage finalement utilisé est donné par le pseudo-code 2.

Premier test

Nous testons maintenant notre algorithme sur le raffinement en espace, qui se fera par dichotomie. Chaque maille marquée à raffiner sera donc divisée en n sous-maillages de longueur $h/2^n$, avec $n \in \{0; 1; 2; 3\}$. Nous fixons le pas de maillage le plus grossier à $h = 0.2$, conformément aux cas de référence.

À titre d'exemple, nous considérons un premier jeu de paramètres à entrer dans notre algorithme. Nous fixons la valeur de l'estimateur d'erreur *a posteriori* minimale à $\eta_{\max} =$

Input : $\eta_{\max} > 0, \epsilon_{\text{deraf}} \geq 0, 0 < \sigma_{\text{raf}} < 1$
 $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \leftarrow (\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$
Initialiser $\eta = 2\eta_{\max}$
Marquer toutes les cellules à recalculer

while $\eta > \eta_{\max}$ **do**
 Calcul des champs $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}})$ à partir de $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$
 Calcul de l'estimateur sur chaque cellule $\{\eta_{\mathcal{K}_i}\}_i$ et de l'estimateur global η à partir
 des champs $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ et $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$
 if $\eta > \eta_{\max}$ **then**
 Tri des valeurs $\{\eta_{\mathcal{K}_i}\}_i$
 Marquer toutes les cellules à recalculer

 $P \leftarrow 1, S \leftarrow \eta_{\mathcal{K}_1}^2$
 while $S < \sigma_{\text{raf}}\eta^2$ **do**
 $P \leftarrow P + 1, S \leftarrow S + \eta_{\mathcal{K}_P}^2$
 end
 Raffiner les cellules $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_P)$
 Marquer les cellules $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_P)$ et leurs voisines à recalculer

 $p \leftarrow N$
 while $\eta_{\mathcal{K}_p} < \epsilon_{\text{deraf}}$ **do**
 Déraffiner \mathcal{K}_p
 Marquer \mathcal{K}_p et ses voisines à recalculer

 $p \leftarrow p - 1$
 end
 Construire Π à partir des nouvelles approximations sur les cellules $\{\mathcal{K}_i\}$
 $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \leftarrow \Pi(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$
 end
end

Algorithme 2 : Pseudo-code de l'algorithme de raffinement/déraffinement du maillage avec option de recalcul local.

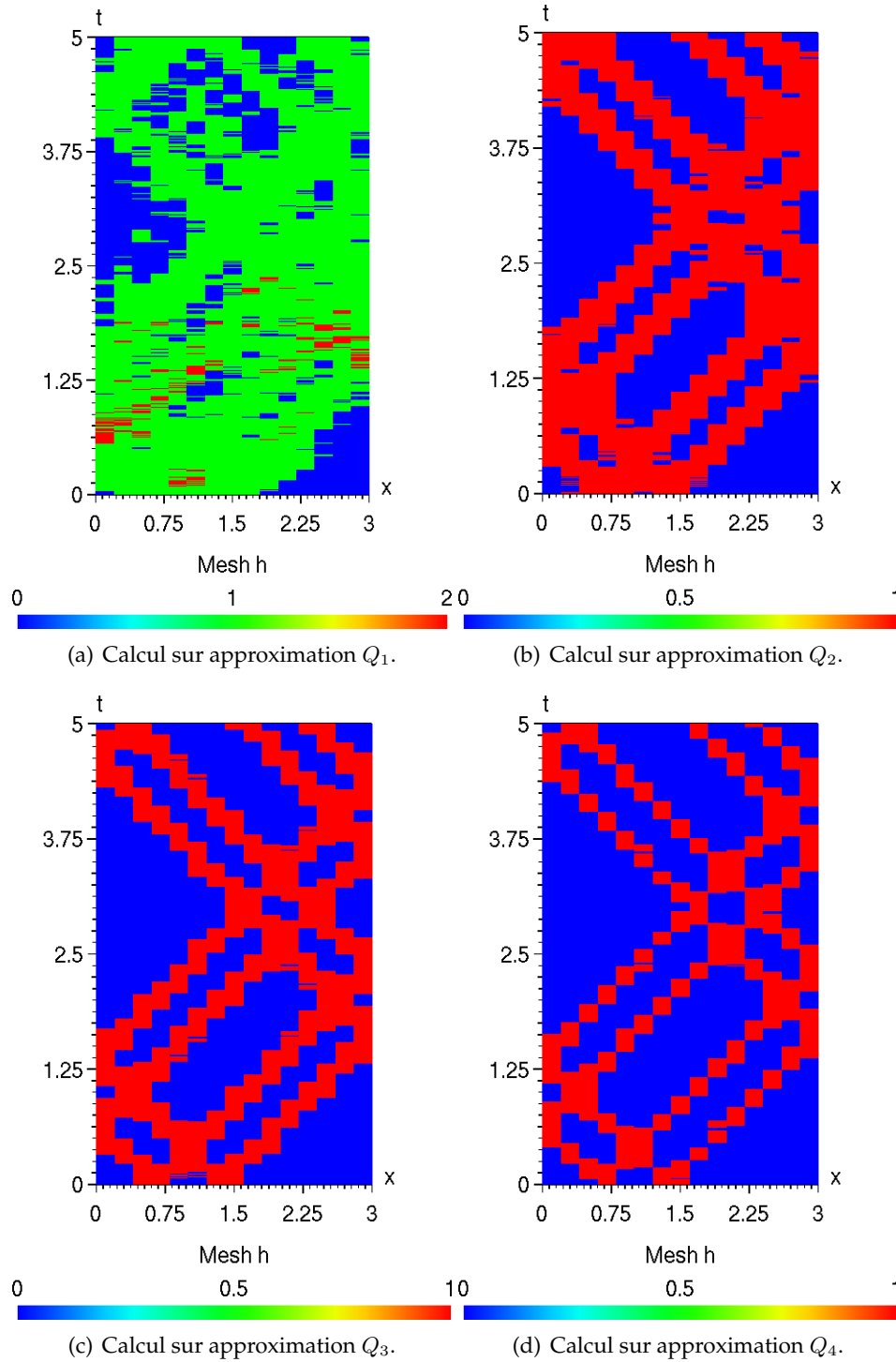


FIGURE 4.12: Évolution du maillage : flux centrés, $\eta_{\max} = 1.e - 4$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

$1.e - 4$, la proportion de cellules à raffiner à $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$ et le seuil de déraffinement à 1% . La figure 4.12 présente l'évolution des niveaux de raffinement de maillage en h pour différents ordres de calcul. Il apparaît que les calculs sur maillages Q_2 , Q_3 et Q_4 ont permis de localiser le même ensemble de cellules, mais cette zone est réduite à mesure que l'ordre augmente. De plus, le niveau maximal de raffinement utilisé ne dépasse pas le premier niveau et se focalise sur les bords du support de la solution. Le calcul sur approximation Q_1 va plus loin en forçant ponctuellement le raffinement jusqu'au niveau 2, et sur une zone beaucoup plus large recouvrant la quasi-totalité du support de la solution. Ce résultat pouvait être attendu au regard du manque de précision du maillage initial et de l'approximation par rapport à la solution attendue. En effet, il est nécessaire de mailler suffisamment finement en espace pour approcher correctement une gaussienne par une fonction Q_1 par morceaux. En revanche, les ordres supérieurs, qui approximent mieux la condition initiale, vont avoir des raffinements qui se focalisent sur une zone plus locale et conduire à une meilleure solution finale.

TABLE 4.4: Évolution du maillage : flux centrés, $\eta_{\text{max}} = 1.e - 4$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	995.56	859.28	1422.21	2205.32
Boucles	37.87	31.19	33.40	32.75
Nb d'inconnues moyen	54.63	69.36	85.32	98.04
Erreur	0.117	2.200e-5	1.251e-6	3.146e-7
Surcalcul moyen	643.70	659.49	912.40	985.49

Nous donnons dans le tableau 4.4 les performances des calculs effectués sur le cas-test, avec le temps CPU, la moyenne des nombres d'inconnues utilisées à chaque itération, le nombre de boucles moyen fait lors de l'algorithme de recherche de maillage, l'erreur L^2 au temps final, et enfin le nombre d'inconnues supplémentaires moyen, c'est-à-dire le nombre d'inconnues recalculées dans les boucles de raffinement/déraffinement divisé par le nombre d'itérations en temps (noté surcalcul moyen). Ces résultats sont à comparer avec ceux obtenus dans le tableau 4.1.

Sur ces résultats, il apparaît clairement que l'approximation Q_1 a été fortement modifiée, avec un nombre de boucles supérieur aux autres (environ 15 – 20% supérieur à celui du calcul sur les autres approximations).

Nous trouvons aussi dans ce tableau les observations faites sur l'évolution des maillages, c'est-à-dire que le calcul Q_1 est proportionnellement plus coûteux et crée plus de cellules en comparaison des ordres supérieurs.

Nous remarquons également que l'erreur sur les calculs Q_2 à Q_4 n'a pas été significativement améliorée au regard des erreurs des calculs sur les maillages fixés au départ. Si l'on compare les résultats obtenus par rapport aux calculs de références sur maillages statiques, nous voyons que ceux-ci coïncident à des calculs sur un maillage dont le pas spatial h varie entre 0.1 et 0.2 pour l'ensemble de la solution. Ceci s'explique par le fait que l'on parte d'un maillage en $h = 0.2$ et que le choix de notre paramètre de contrainte η_{max} est dans ce cas trop faible pour que l'algorithme force le raffinement du maillage de façon importante. Nous pouvons en déduire que l'effort produit s'est donc concentré sur des zones de faible intérêt pour l'amélioration de la solution.

En prenant les chiffres du surcalcul moyen, qui correspond au nombre d'inconnues

calculées par itération en temps hors première boucle, et qu'on le quotiente par le nombre moyen de boucles supplémentaires (ie : le nombre moyen de boucles moins une), on en déduit le nombre d'inconnues moyennes recalculées par boucle supplémentaire $N_{\text{inc/boucle}}$. Dans le cas Q_1 , on obtient un effort par boucle supplémentaire de $N_{\text{inc/boucle}} \approx 17.4$ inconnues soit environ 1/3 du calcul moyen d'une itération. Cela montre que, sur cet exemple, la stratégie de localisation utilisée nous permet d'économiser *a priori* 2/3 de calculs inutiles. Par contre, en se reportant à l'évolution du maillage représentée dans la figure 4.12, on constate qu'il ne semble pas y avoir une modification de celui-ci de 30% entre deux itérations en temps. Il semble donc que le nombre d'inconnues supplémentaires recalculées reflète en grande partie des tests de nouveaux espaces moins pertinents au vu des seuils de précision et raffinement imposés. Ceci est confirmé par le nombre de boucles moyen important qui donne le nombre de maillages testés par itération. Ce dernier étant largement supérieur au nombre de raffinements maximum par maille et par itération (pris égal à 10), on en déduit que le choix des paramètres η_{max} et ϵ_{deraf} a conduit à un phénomène d'hystérésis tel que décrit dans la figure 4.9. En effet, si le nombre de boucles moyen était inférieur ou de l'ordre du compteur, cela signifierait que le processus de raffinement/déraffinement a convergé vers une valeur d'estimateur *a posteriori* dans la bande critique $[\eta_{\text{deraf}}, \eta_{\text{raf}}]$ et *a contrario*, quand il est largement plus grand, alors la convergence a pu éventuellement être atteinte en certains endroits mais avec une forte partie de zones en hystérésis.

De même, pour les cas Q_2 , Q_3 et Q_4 , nous trouvons des $N_{\text{inc/boucle}}$ égaux respectivement à 21.3, 27.6 et 29.8, soit environ encore 1/3 du calcul moyen d'une itération. Ceci confirme l'efficacité de la stratégie de localisation. Par ailleurs, le nombre de boucles moyen pour ces cas étant toujours largement supérieur au nombre de raffinements maximum par maille et par itération, on en déduit la présence du même phénomène d'hystérésis. On va donc s'intéresser à l'influence de ces paramètres par la suite.

Enfin, concernant les temps CPU, par comparaison avec les valeurs de référence (cf. tableau 4.1), le temps calcul effectif de la méthode adaptative par rapport à une simulation sur maillage « statique » correspondant au même nombre d'inconnues moyen est prohibitif (facteur multiplicatif de 50 pour le Q_2 jusqu'à 108 pour le Q_4). Toutefois, le nombre réel d'inconnues calculées par itération en temps (en moyenne) dans le cas adaptatif est donné par la somme du nombre moyen d'inconnues et du nombre moyen d'inconnues supplémentaires, soit un facteur multiplicatif compris entre 10.5 pour le Q_2 et 12.8 pour le Q_1 . D'après le paragraphe précédent, le nombre d'inconnues supplémentaires est important à cause du mauvais choix des paramètres, et donc on peut espérer diminuer significativement ce surcoût par un meilleur choix de ceux-ci.

En se référant à ce nombre réel d'inconnues calculées par itération en temps et en extrapolant les temps des calculs de référence, le facteur de surcoût se réduit alors à une fourchette comprise entre 5.7 pour le cas Q_1 et 14.1 pour le Q_4 . Il apparaît donc que la mise en œuvre de la méthode adaptative engendre certains surcoûts propres et importants qui seront identifiés par la suite.

4.3.3 Étude paramétrique

Nous allons dans ce paragraphe essayer de vérifier nos hypothèses sur l'influence des paramètres de notre algorithme de raffinement sur l'efficacité de celui-ci.

4.3.3.1 Influence de la nature des flux utilisés

Nous reprenons les calculs faits précédemment en introduisant un décentrement des flux, ici pour des flux totalement décentrés ($\lambda = 1$ dans l'équation (2.6)) et des flux partiellement décentrés ($\lambda = 0.3$), afin de vérifier si le choix du décentrement des flux influe *a priori* ou non sur les observations que nous avons effectuées pour le cas flux centrés dans la section 4.3.2.

Les figures 4.13 et 4.14 présentent l'évolution des niveaux de raffinement de maillage en h pour différents ordres de calcul en flux décentrés et partiellement décentrés. Nous voyons alors que le décentrement des flux a permis de générer moins de cellules sur l'approximation Q_1 , qui permet de n'obtenir qu'un seul niveau de raffinement. Ces résultats sont cohérents avec nos observations sur le comportement de l'estimateur *a posteriori* pour le cas des calculs en flux décentrés. Les résultats obtenus avec des calculs d'ordres supérieurs n'ont pas été grandement modifiés, les mêmes zones étant repérées et raffinées, avec des niveaux analogues au cas centré.

TABLE 4.5: Performances des calculs avec flux décentrés pour $\eta_{\max} = 1.e - 4$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

(a) Performances des calculs avec flux totalement décentrés ($\lambda = 1$).					
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	
t_{CPU}	1038.10	871.40	1454.90	2221.44	
Boucles	41.81	32.23	33.99	32.90	
Nb d'inconnues moyen	48.50	69.32	85.30	98.04	
Erreur	4.070e-2	1.121e-5	5.912e-7	2.484e-7	
Surcalcul moyen	652.84	684.59	922.12	996.71	
(b) Performances des calculs avec flux partiellement décentrés ($\lambda = 0.3$).					
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	
t_{CPU}	908.33	905.01	1467.66	2206.29	
Boucles	38.15	33.04	34.03	32.81	
Nb d'inconnues moyen	47.84	69.27	85.28	98.04	
Erreur	8.175e-2	1.334e-5	4.886e-7	2.002e-7	
Surcalcul moyen	561.01	701.66	923.68	992.86	

Nous donnons dans le tableau 4.5 les mêmes détails concernant les performances de ces calculs que dans le cas flux centrés. L'erreur pour le cas Q_1 n'a pas bénéficié de l'utilisation du décentrement comme on avait pu l'observer pour les cas de référence vus dans les tableaux 4.2 et 4.3. De même, les calculs Q_2 à Q_4 donnent une erreur comparable à celle du calcul flux centrés 4.4. En conclusion, à ce niveau, on n'observe pas de réelle influence de la nature des flux utilisés.

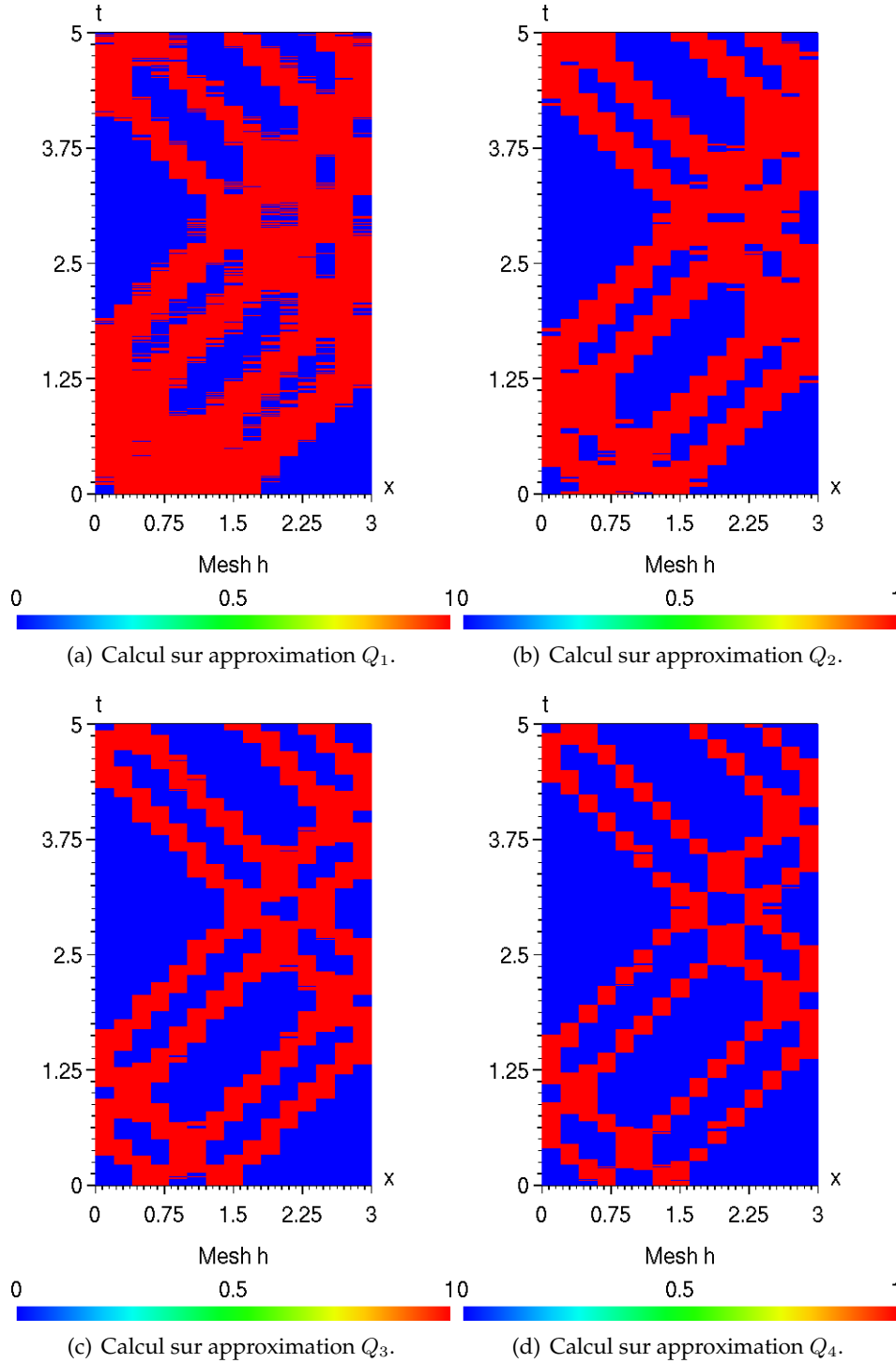


FIGURE 4.13: Évolution du maillage : flux décentrés, $\eta_{\max} = 1.e - 4$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

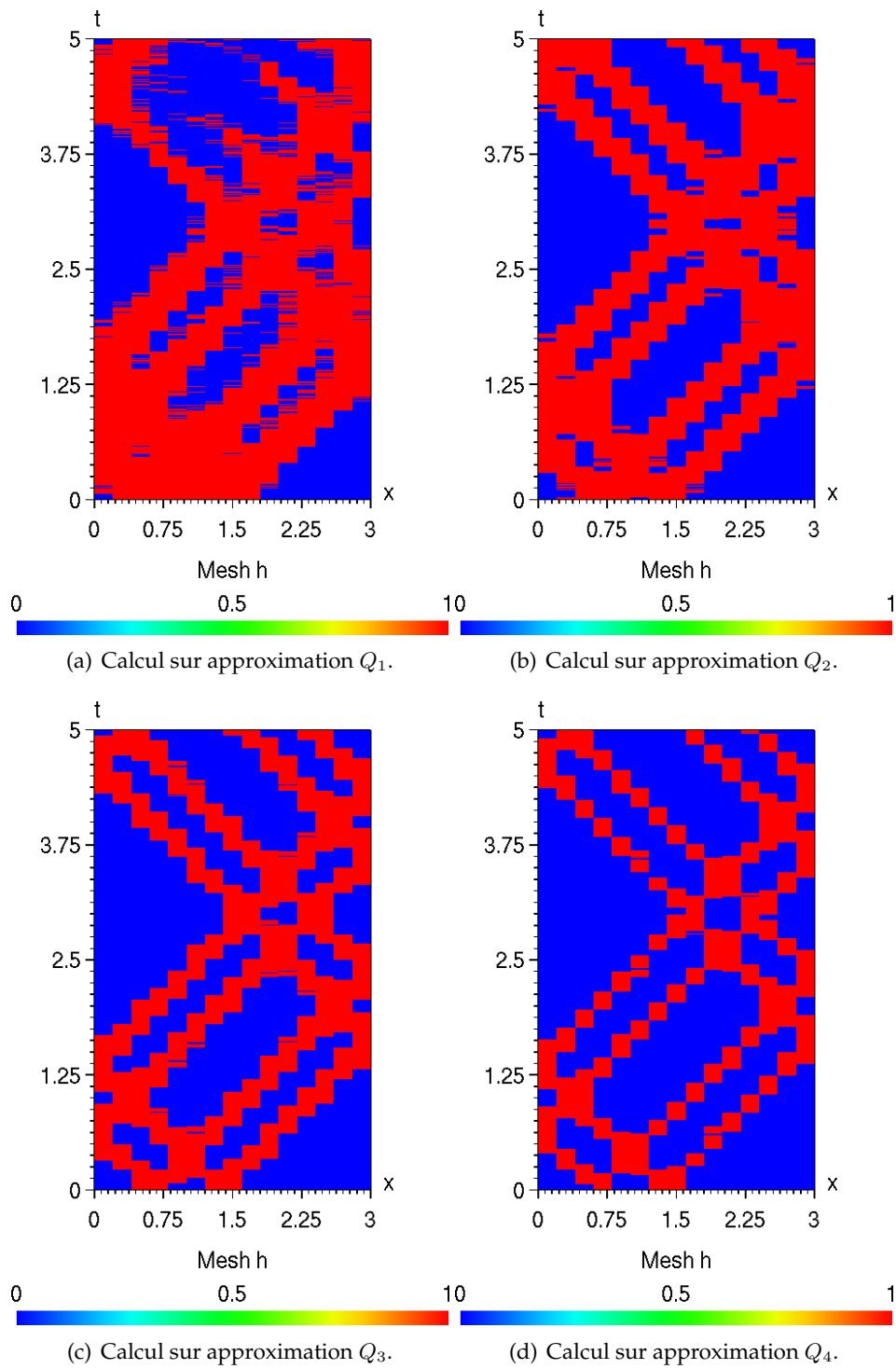


FIGURE 4.14: Évolution du maillage : flux décentrés partiels ($\lambda = 0.3$), $\eta_{\max} = 1.e - 4$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

4.3.3.2 Étude des temps de calculs

On s'intéresse maintenant au détail des coûts pour le temps calcul afin d'expliquer les facteurs de surcoûts observés dans la section 4.3.2. Pour ce faire, nous étudions la décomposition du temps calcul selon les éléments suivants :

- Calcul *leap-frog* : temps pris dans les routines de calcul des champs sur l'avancée en temps ;
- Calcul η : coût de la construction de l'estimateur *a posteriori* ;
- Analyse η : temps passé dans les routines effectuant le tri descendant des valeurs locales de l'estimateur *a posteriori* (η_K), le marquage des éléments à raffiner et enfin la sélection des cellules à déraffiner ;
- Calcul Π : assemblage et calcul de la projection de condition initiale Π ;
- Gestion maillage et inconnues : temps passé dans les routines d'assemblage des maillages utilisés, de renumérotation des inconnues sur les nouveaux maillages et de sauvegarde de ces informations pour l'assemblage de Π .

Ces valeurs sont données, pour les cas-tests vus précédemment, dans le tableau 4.6.

TABLE 4.6: Détail des temps d'exécution des étapes du cas-test pour $\eta_{\max} = 1.e - 4$

(a) Cas-test en flux centrés					
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	
Calcul <i>leap-frog</i>	96.44	81.15	90.98	87.48	
Calcul η	102.68	89.82	104.72	107.74	
Analyse η	44.59	32.49	32.00	29.34	
Calcul Π	326.40	300.41	814.70	1571.46	
Gestion maillage et inconnues	419.44	350.52	427.47	396.86	
(b) Cas-test en flux décentrés					
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	
Calcul <i>leap-frog</i>	103.21	85.85	93.71	89.12	
Calcul η	109.28	95.08	107.98	110.29	
Temps analyse η	43.67	34.21	32.87	29.42	
Calcul Π	336.50	312.04	850.01	1594.13	
Gestion maillage et inconnues	448.94	366.41	394.58	401.29	
(c) Cas-test en flux partiellement décentrés					
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	
Calcul <i>leap-frog</i>	91.87	86.78	95.79	92.18	
Calcul η	96.90	97.95	108.19	110.83	
Temps analyse η	39.45	34.26	33.70	30.50	
Calcul Π	290.80	329.21	848.15	1598.86	
Gestion maillage et inconnues	409.31	370.5	393.97	403.46	

Nous observons tout d'abord que la somme du temps passé dans la résolution *leap-frog* et du calcul de l'estimateur sont globalement cohérents avec l'extrapolation des temps de références par rapport au nombre réel d'inconnues calculées par itération en temps. Ainsi, par exemple, pour le Q_1 en flux centrés, le nombre réel d'inconnues par itération est de

698, soit 5.8 fois le nombre d'inconnues du calcul Q_1 pour $h = 5e - 2$ qui représenterait un temps de 203 secondes pour 199 obtenues par la somme des temps de calcul *leap-frog* et de calcul η .

D'un autre côté, le temps requis pour l'analyse de l'estimateur *a posteriori* et la stratégie d'adaptation est non négligeable, étant de l'ordre de 50% de la résolution *leap-frog* sur ces exemples. Toutefois, cette valeur peut ne pas être représentative du cas général car le calcul *leap-frog* bénéficie de la stratégie de localisation mise en place et n'est donc effectué que sur certains éléments au sein d'une boucle de raffinement/déraffinement alors que les éléments de l'étape d'analyse doivent être réalisés sur l'ensemble du maillage à chaque itération de l'algorithme d'adaptation. Pour donner un ordre de grandeur, on peut le quotienter par le nombre de boucles moyen et le comparer à la résolution du problème statique avec calcul de l'estimateur *a posteriori*, à nombre d'inconnues moyen égal, pour en déterminer le surcoût induit par l'analyse par boucle. Ainsi, par exemple, sur le Q_1 en flux centrés, le ratio temps d'analyse sur nombre de boucles moyen est de 1.18, le temps de calcul *leap-frog* avec estimateur statique pour un nombre moyen d'inconnues de 60 est de 22.90, on obtient ainsi un surcoût global de l'analyse par boucle de $1.18/22.90 \approx 5.14\%$.

On note toutefois que le temps de l'analyse estimateur diminue avec l'ordre ce qui est cohérent avec la construction des valeurs locales de l'estimateur *a posteriori* qui ne dépendent que du maillage utilisé et non de l'ordre, donc un nombre d'inconnues constant nécessite moins de travail pour un ordre élevé que pour un ordre faible. Le surcoût global de l'analyse par boucle pour le cas Q_4 tombe alors à 3.33%.

Pour résumer, dans le cas Q_4 , en notant t_{ref} le temps de calcul pour la solution de référence avec estimateur pour un nombre d'inconnues égal au nombre d'inconnues moyen (noté $N_{\text{inc moy}}$), $\text{Surcout}_{\text{moy}}$ le surcoût moyen et N_{boucles} le nombre de boucles moyen, on peut effectuer l'estimation suivante :

$$t_{\text{leap-frog}} + t_{\text{estimateur}} + t_{\text{analyse}} \approx t_{\text{ref}} \times \left(1 + \frac{\text{Surcout}_{\text{moy}}}{N_{\text{inc moy}}} + 0.0334 \times N_{\text{boucles}} \right).$$

Au vu du tableau 4.6, on constate donc que l'essentiel du temps calcul (de 75% en Q_1 à 90% en Q_4) est utilisé dans les phases de gestion du maillage et de projection de condition initiale. Plus précisément, la part de chacun de ces deux éléments évolue de manière inverse en fonction de l'ordre (la gestion du maillage passe de 42% du temps CPU en Q_1 à 18% en Q_4 , alors que la construction de Π prend quant à elle de 33% en Q_1 à 69% en Q_4).

Dans le temps de gestion du maillage, sont prises en compte la création des nouveaux maillages après marquage pour raffinement ou déraffinement par l'analyse de l'estimateur *a posteriori*, l'initialisation et la numérotation des inconnues sur ces nouveaux maillages et la sauvegarde du maillage précédent pour le calcul du projecteur de condition initiale. Le principal défaut de ce code est que nous avons pris le parti de créer une structure de maillage qui soit réinitialisée pour chaque test de nouvelle configuration (*ie* : pour chaque itération de la boucle de raffinement/déraffinement). Les temps d'allocation, désallocation et initialisation des différents tableaux, même si effectuées de manière locale, expliquent alors le coût prohibitif de cette phase de la résolution. Une piste d'amélioration de ce problème pourrait être d'utiliser une gestion en tableaux semi-fixe avec un système d'indentation des inconnues permettant de se repérer rapidement sur les éléments et de réutiliser les espaces du tableau correspondant à des cellules détruites [24]. On espère avec ce type de méthodes rendre la part de gestion du maillage petite devant le temps de résolution et de calcul de l'estimateur

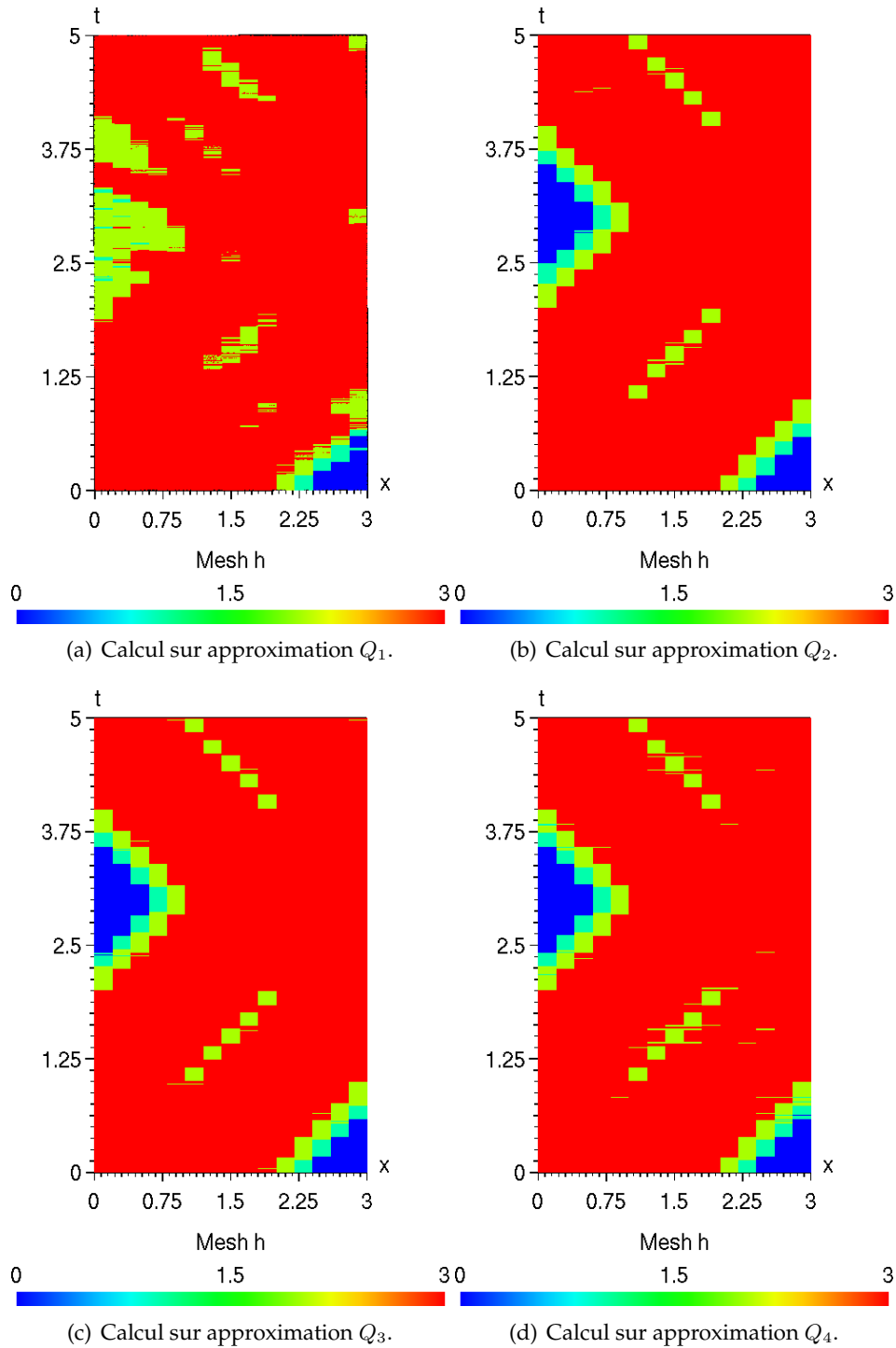
a posteriori.

Enfin, concernant la projection de condition initiale, conformément à ce qui a été introduit dans le chapitre 2, l'opérateur Π est construit selon les cas décrits par les propositions 2.13 et 2.14, où seule la seconde introduit des modifications locales. Toutefois, dans le cas de Π , le terme de modification locale est à comprendre comme la différence entre les valeurs calculées sur un nouveau maillage testé à une itération k de la boucle de raffinement/déraffinement permettant de calculer les champs au temps t^{n+1} , par rapport à l'espace utilisé pour obtenir la valeur de ceux-ci au temps t^n . Ainsi, le k^{eme} maillage testé pour le temps t^{n+1} représente le cumul des $k - 1$ tests précédents. On peut ainsi se trouver dans la situation suivante : si on décide de ne modifier qu'une cellule à chaque itération de la boucle, alors le maillage construit à la k^{eme} itération peut représenter jusqu'à k cellules de différence avec celui obtenu pour le temps t^n . Le coût de Π étant directement proportionnel à ce nombre de cellules de différences, il peut aisément devenir plus important que le temps nécessaire à la résolution *leap-frog* et au calcul de l'estimateur sur une cellule. Par ailleurs, l'augmentation du coût de Π avec l'ordre telle qu'observée sur l'exemple étudié dans cette section s'explique simplement par le temps nécessaire à l'assemblage et l'inversion des matrices décrites dans la proposition 2.14. Malgré cela, une piste sérieuse d'amélioration est donnée par la construction de Π pour le cas 3D (section 2.4) où nous avons montré qu'il était possible de l'obtenir sans imposer de contrainte au bord des cellules. Ainsi, la proposition 2.27, équivalent 3D de la proposition 2.14, montre qu'alors le calcul de Π se résume à une projection L^2 dans un espace de type $H(\text{rot})$ à poids. Or d'après les valeurs des temps calculs comparés des différentes projections dans le cas 1D (tableau 2.1), nous avons constaté que le coût d'une projection L^2 était très largement inférieur à celui de Π avec les contraintes aux bords. Il semblerait donc possible de diminuer significativement le temps nécessaire à cette partie du calcul en prenant une construction de Π de la forme L^2 sans contrainte telle qu'introduite dans le cas 3D.

4.3.3.3 Étude du paramètre d'erreur

Dans la section 4.3.2, nous avons reporté dans le tableau 4.4 les résultats obtenus pour un premier jeu de paramètres et nous n'avions pas constaté, pour celui-ci, d'apport de la méthode de raffinement adaptative sur la précision de la solution. Ceci est *a priori* lié à un seuil trop important sur l'estimateur *a posteriori*. Nous reprenons les calculs précédents en fixant désormais le paramètre de contrainte sur l'erreur à $\eta_{\max} = 1.e - 8$. Les figures 4.15 à 4.17 présentent l'évolution des niveaux de raffinement de maillage en h pour différents ordres d'approximation dans la méthode GD, différentes valeurs de flux et en laissant fixé σ_{raf} à 10% et ϵ_{deraf} à 1%.

Nous obtenons, comme pour les cas précédents, des comportements similaires pour les ordres 2 à 4, mais ici, comme la valeur limite de l'estimateur à partir de laquelle on marque la cellule a été diminuée, le nombre de cellules raffinées et les niveaux de raffinement sont plus élevés et recouvrent l'intégralité du support de la solution. Pour ces mêmes ordres (2 à 4), les seules mailles non raffinées sont celles où la solution est presque nulle. Nous obtenons donc un raffinement de bien meilleure qualité que dans le cas $\eta_{\max} = 1.e - 4$, qui suit correctement l'évolution de la solution.

FIGURE 4.15: Évolution du maillage : flux centrés, $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

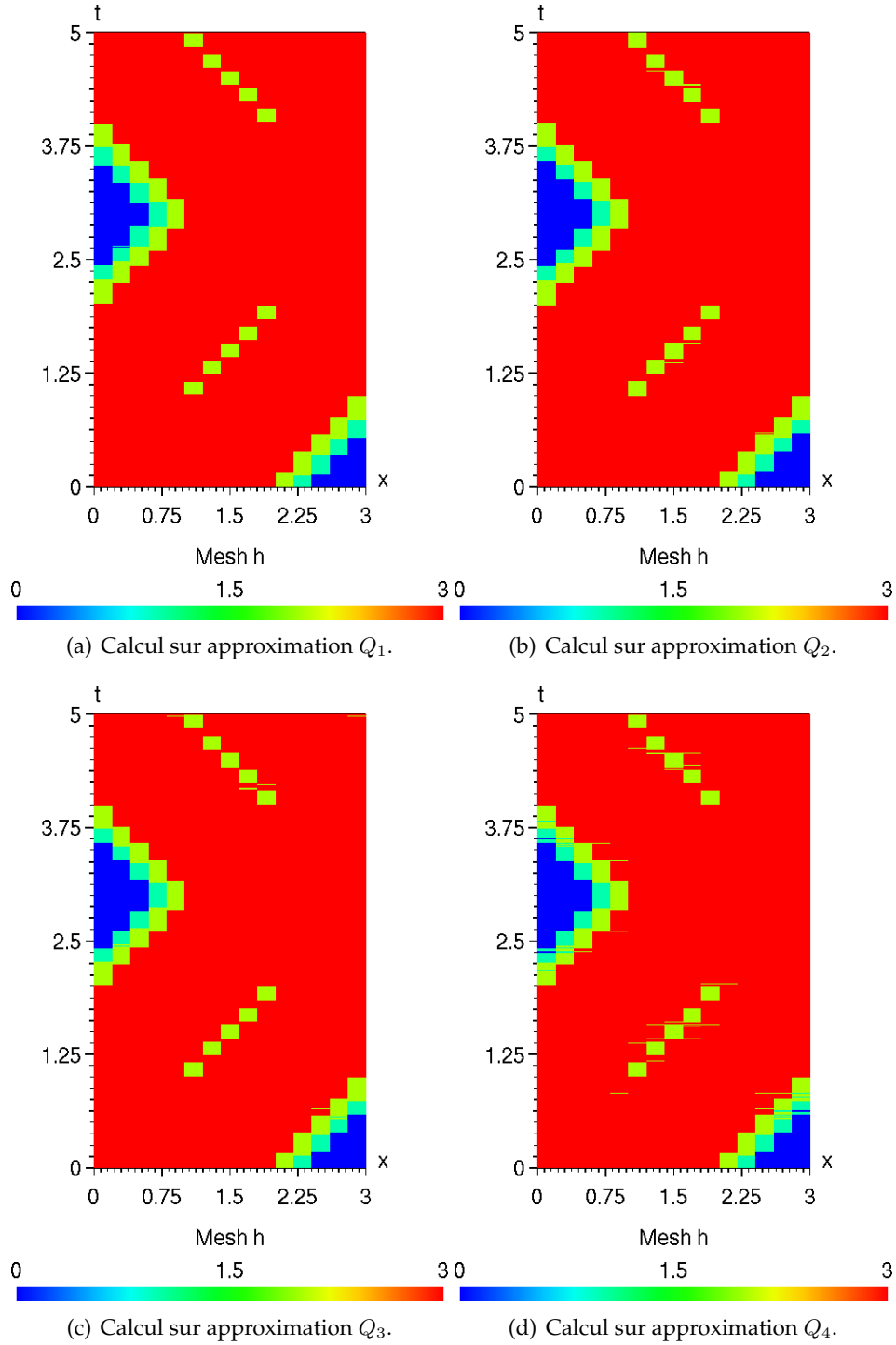


FIGURE 4.16: Évolution du maillage : flux décentrés, $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

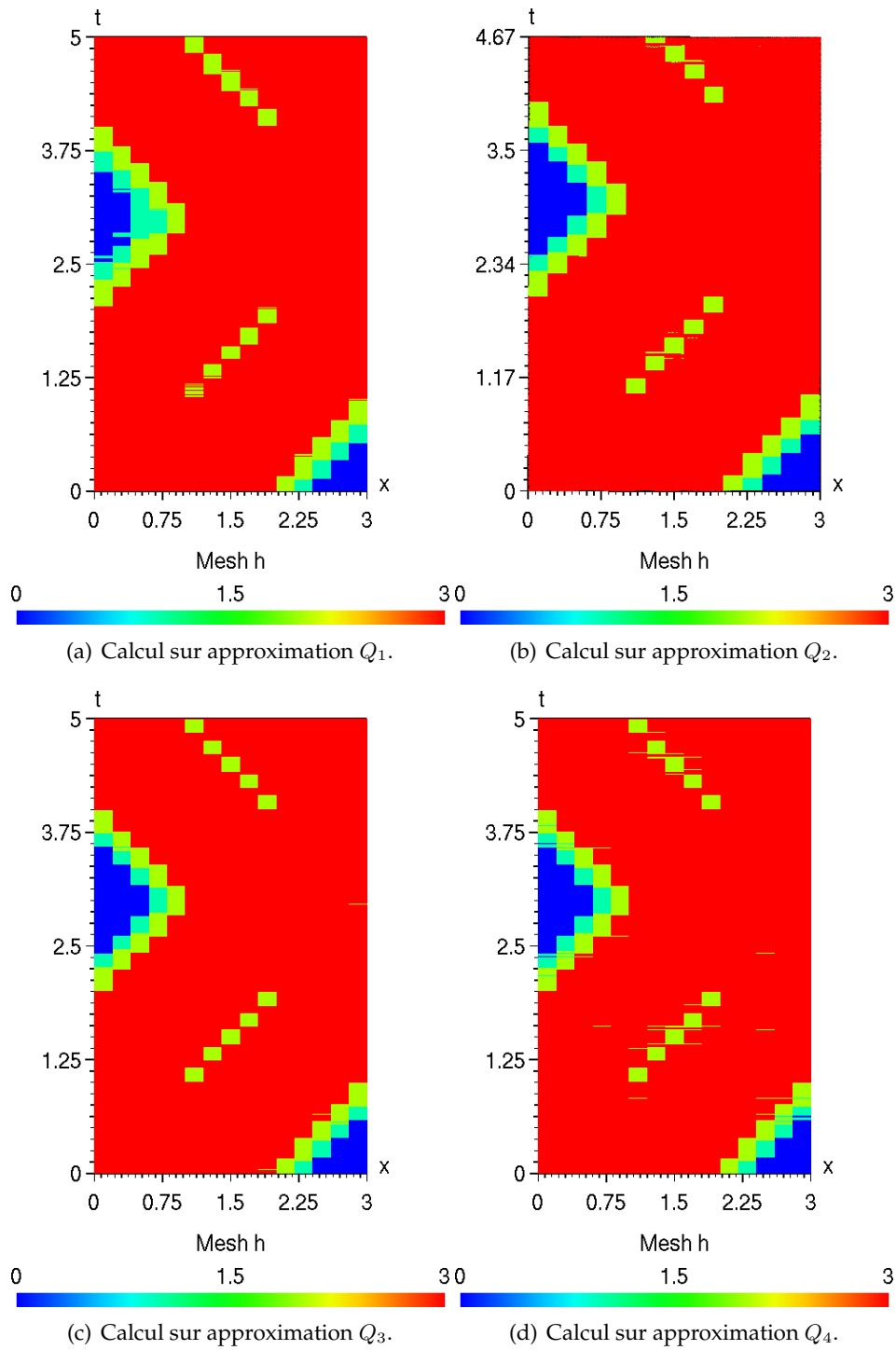


FIGURE 4.17: Évolution du maillage : flux décentrés partiels ($\lambda = 0.3$), $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

Concernant les calculs en flux centrés sur approximation Q_1 , nous notons un raffinement de zones de faible intérêt près du bord gauche pour des temps entre 2.5 et 3.7 et près du bord droit pour des temps avant 0.8. En se référant aux observations sur l'estimateur *a posteriori* effectuées dans la section 4.2.2, il semble que l'on retrouve le phénomène de *spurious mode* qui était essentiellement visible en Q_1 en flux centrés. En se basant sur cette hypothèse et en supposant que la vitesse de propagation serait similaire à celle déjà observée, on retrouverait la présence de l'onde parasite émise par la condition initiale sur le bord droit pour des temps inférieurs à 0.8 puis par le rebond sur le bord droit centré en $t = 2$ qui se propagerait alors jusqu'à atteindre le bord gauche autour du temps 3.5. Sous réserve de validité de cette observation, en se reportant au résultat de la section 4.2.2, on voit que dans ce cas, l'estimateur aurait tendance à marquer ces zones et donc à induire des raffinements. Toujours conformément aux observations de la section 4.2.2, ce phénomène n'est pas constaté sur les ordres supérieurs et les autres types de flux.

TABLE 4.7: Performances des calculs pour $\eta_{\max} = 1.e - 8$.

(a) Performances du calcul en flux centrés, pour $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1142.75	2760.42	5496.61	13216.87
Boucles	21.46	31.04	33.81	37.09
Nb d'inconnues moyen	221.82	327.44	435.79	541.87
Erreur	1.187e-3	1.278e-7	1.694e-8	7.802e-9
Surcalcul moyen	1195.72	3067.05	4542.25	6195.39

(b) Performances du calcul en flux décentrés, pour $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1181.13	2852.06	5704.07	13684.91
Boucles	22.64	31.70	34.35	37.53
Nb d'inconnues moyen	218.57	327.37	435.68	541.84
Erreur	4.097e-6	2.765e-7	3.026e-7	2.938e-7
Surcalcul moyen	1223.67	3137.78	4589.66	6238.70

(c) Performances du calcul en flux partiellement décentrés, pour $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1142.03	2833.65	5719.29	13600.96
Boucles	22.49	31.44	34.42	37.42
Nb d'inconnues moyen	218.37	327.41	435.70	541.80
Erreur	7.778e-5	1.356e-7	1.015e-7	1.082e-7
Surcalcul moyen	1112.35	3121.49	4597.79	6229.21

Nous observons sur les tableaux 4.7 une amélioration significative des résultats par rapport aux calculs effectués pour $\eta_{\max} = 1.e - 4$. En effet, en partant du maillage le plus grossier, l'algorithme de raffinement automatique a permis de retrouver des erreurs comparables à celles calculées pour les cas de références avec les maillages les plus fins. Au niveau du nombre d'inconnues, le nombre moyen obtenu est légèrement inférieur à celui du maillage statique correspondant pour le raffinement de plus haut degré ($h = 0.025$). Ceci est cohérent avec l'évolution des maillages représentée par les figures 4.15-4.16-4.17. On note

cependant de moins bons résultats dans le cas de l'approximation Q_1 en flux centrés, dont on a vu qu'elle semblait engendrer des *spurious modes* qui ont pu être focalisés par l'estimateur *a posteriori*. Remarquons enfin que le processus de raffinement/déraffinement semble fonctionner correctement, comme en atteste le passage sur certaines zones de l'état de raffiné à déraffiné et inversement. En particulier, on note un suivi des caractéristiques sur le bord du support de la solution qui semble être selon une éventuelle erreur de dissipation, tout en convergeant vers un état de raffinement intermédiaire *a priori* satisfaisant pour l'estimateur *a posteriori*.

TABLE 4.8: Détail des temps d'exécution des étapes du cas-test pour $\eta_{\max} = 1.e - 8$

(a) Cas-test en flux centrés				
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Calcul <i>leap-frog</i>	143.85	258.34	317.33	400.69
Calcul η	136.76	261.66	341.17	446.39
Analyse η	182.27	239.64	257.46	275.75
Calcul Π	223.41	1321.15	3807.58	11203.67
Gestion maillage et inconnues	452.34	674.32	767.18	883.46

(b) Cas-test en flux décentrés				
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Calcul <i>leap-frog</i>	147.33	270.51	327.68	408.92
Calcul η	142.65	274.06	355.17	457.25
Analyse η	177.71	243.76	261.87	277.78
Calcul Π	240.26	1366.12	3075.82	11641.10
Gestion maillage et inconnues	469.41	692.16	777.51	892.81

(c) Cas-test en flux partiellement décentrés				
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Calcul <i>leap-frog</i>	136.28	269.43	331.28	407.54
Calcul η	134.40	272.74	355.09	457.84
Analyse η	173.01	241.60	261.00	278.62
Calcul Π	230.70	1358.10	3985.34	11555.87
Gestion maillage et inconnues	461.70	686.48	780.69	894.30

Concernant les temps calculs, par comparaison avec ceux obtenus pour $\eta_{\max} = 1.e - 4$, on peut constater pour le Q_4 une augmentation d'un facteur 6 du temps CPU qui semble en adéquation avec le facteur 6.22 d'accroissement du nombre total d'inconnues moyen. Toutefois, pour les cas Q_1 - Q_2 , on ne retrouve pas cet accroissement linéaire en fonction du nombre d'inconnues (pour $Q_1 : t_{\text{CPU}} \times 1.13$ et $N_{\text{binctot}} \times 2.03$, pour $Q_2 : t_{\text{CPU}} \times 3.19$ et $N_{\text{binctot}} \times 4.66$). Afin de mieux appréhender les causes de cette différence, nous reportons dans le tableau 4.8 l'étude détaillée des temps, que nous comparons au tableau 4.6. On constate que le coût de l'analyse de l'estimateur suit logiquement l'évolution du nombre de mailles (ie : les niveaux de raffinement). Ainsi, en se reportant aux figures 4.15-4.17 et 4.12-4.14, nous constatons que le taux de raffinement moyen passe d'environ 1 pour Q_1 et proche de 0 pour les autres ordres à environ 8 quant η_{\max} passe de $1e - 4$ à $1e - 8$. Nous retrouvons alors les coefficients voisins de 4 pour le Q_1 et 8 pour les autres ordres sur l'évolution de l'analyse de η .

Par ailleurs, le temps de calcul cumulé $t_{\text{leapfrog}} + t_{\text{estimateur}}$ croît avec le nombre d'inconnues sur le calcul mais plus lentement que celui-ci. Ceci s'explique par une simplification obtenue par la factorisation de certaines opérations (matrice de masse, rigidité...) effectuées qu'une seule fois par méta-élément car identiques pour tous les sous-éléments au sein de l'octree.

Comme précédemment, l'essentiel du coût calcul est donc reporté sur la construction de Π et la gestion du maillage qui augmentent respectivement avec l'ordre et le degré de découpage.

4.3.3.4 Étude des causes de l'hystérésis

Nous nous intéressons maintenant à l'étude du phénomène d'hystérésis tel qu'il est décrit sur la figure 4.9 dont nous avons montré dans la section 4.3.2 qu'il était responsable de l'augmentation du nombre de boucles de raffinement/déraffinement auquel sont directement proportionnelles les deux parties les plus coûteuses de l'algorithme que sont la construction de l'opérateur Π et la gestion du maillage. Nous allons donc évaluer successivement l'influence des paramètres de déraffinement ϵ_{deraf} et de raffinement σ_{raf} .

Influence du paramètre de déraffinement ϵ_{deraf}

Nous reprenons le cas de calcul vu dans la section 4.3.3.3 en fixant désormais le paramètre de déraffinement ϵ_{deraf} à 0,1% à la place de 1%. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 4.9.

On peut constater que l'abaissement du seuil de raffinement a pour conséquence immédiate la diminution significative du nombre de boucles de raffinement/déraffinement (globalement -30% sauf pour le Q_1), donc par induction, le surcoût moyen est diminué du même facteur, ce qui se retrouve alors dans le temps calcul sans perte de précision. Les solutions obtenues sont donc les mêmes dans ces deux cas (comme en atteste par ailleurs le nombre d'inconnues moyen). L'augmentation de la taille de la bande critique $[\epsilon_{\text{deraf}}\eta_{\text{max}}, \eta_{\text{raf}}]$ pour l'erreur admissible induit donc la limitation du phénomène d'hystérésis observé précédemment.

Dans le cas particulier du Q_1 , le nombre de boucles entre $\epsilon_{\text{deraf}} = 1\%$ et 0.1% est inchangé bien qu'ayant fortement diminué (divisé par 2) entre les cas $\eta_{\text{max}} = 1.e - 4$ et $\eta_{\text{max}} = 1.e - 8$. Ceci peut s'expliquer, comme observé sur les cas de référence, par une erreur beaucoup plus importante en Q_1 que sur les autres ordres, et donc *a priori* la difficulté d'obtenir des valeurs d'estimateur *a posteriori* inférieures à $\eta_{\text{max}} \times \epsilon_{\text{deraf}} = \eta_{\text{deraf}}$.

Influence du paramètre de raffinement σ_{raf}

Nous allons maintenant tester le paramètre σ_{raf} et pour ce faire, nous augmentons celui-ci à 30% , en prenant $\epsilon_{\text{deraf}} = 1\%$ pour pouvoir comparer avec les résultats de la sec-

TABLE 4.9: Performances des calculs pour $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$ et $\epsilon_{\text{deraf}} = 0,1\%$.(a) Évolution du maillage : $\eta_{\max} = 1.e - 8$, flux centrés, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1103.25	1643.04	2603.24	5483.16
Boucles	21.15	22.93	22.98	25.44
Nb d'inconnues moyen	220.63	327.76	436.49	544.16
Erreur	1.193e-3	1.219e-7	1.961e-8	9.939e-9
Surcalcul moyen	1182.10	2140.47	2866.75	3923.53

(b) Évolution du maillage : $\eta_{\max} = 1.e - 8$, flux décentrés, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	983.49	1689.09	2837.99	5839.89
Boucles	19.37	23.35	24.33	26.51
Nb d'inconnues moyen	218.70	327.65	436.39	544.17
Erreur	3.961e-6	2.690e-7	2.932e-7	3.114e-7
Surcalcul moyen	969.84	2170.70	3040.61	4067.72

(c) Évolution du maillage : $\eta_{\max} = 1.e - 8$, flux décentrés partiels, $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1034.22	1630.57	2825.13	5859.23
Boucles	20.55	22.43	24.25	26.83
Nb d'inconnues moyen	218.38	327.64	436.36	544.15
Erreur	7.763e-5	1.295e-7	9.799e-8	1.184e-7
Surcalcul moyen	1013.10	2086.29	3027.32	4106.26

tion 4.3.3.3.

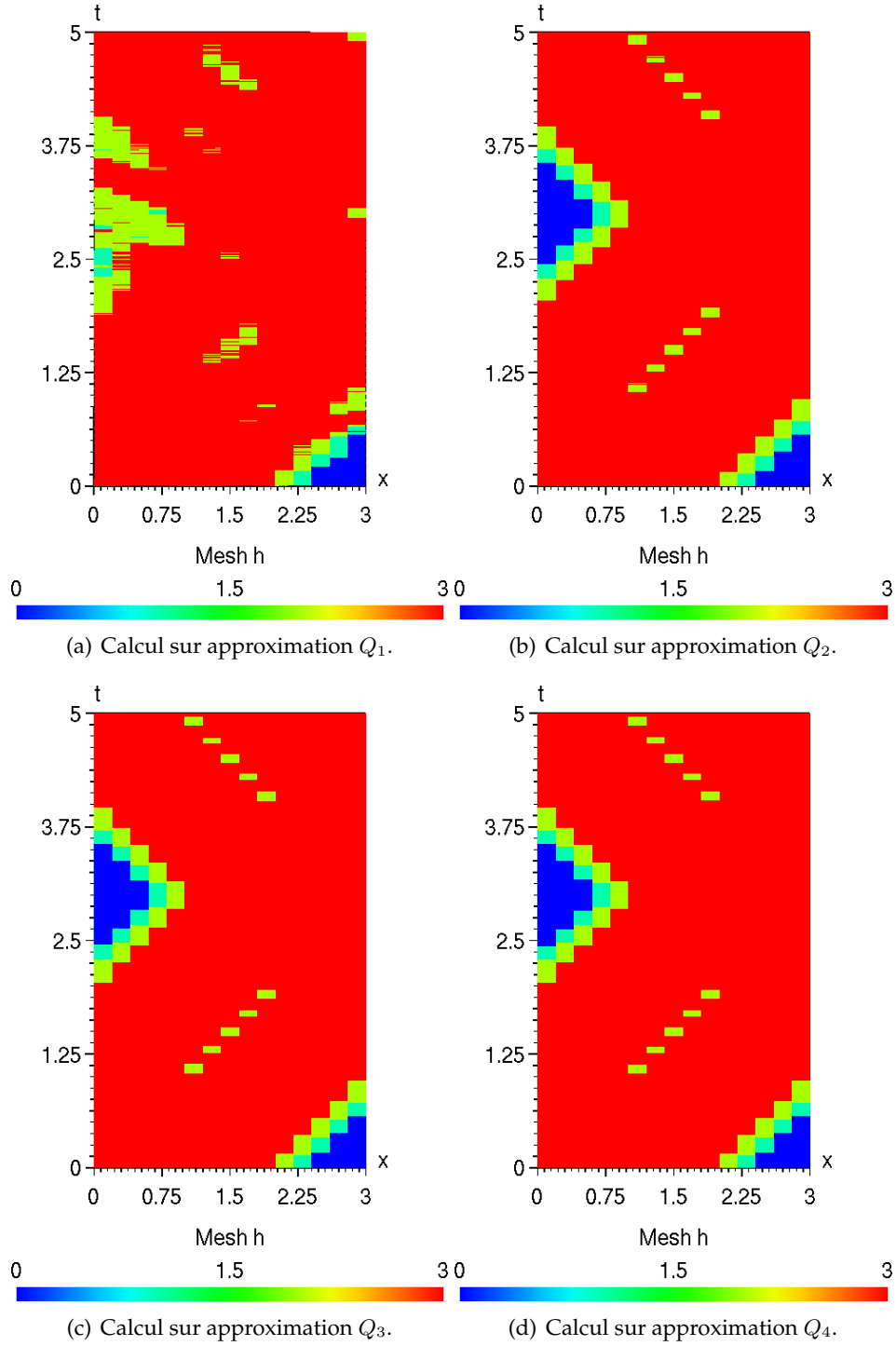
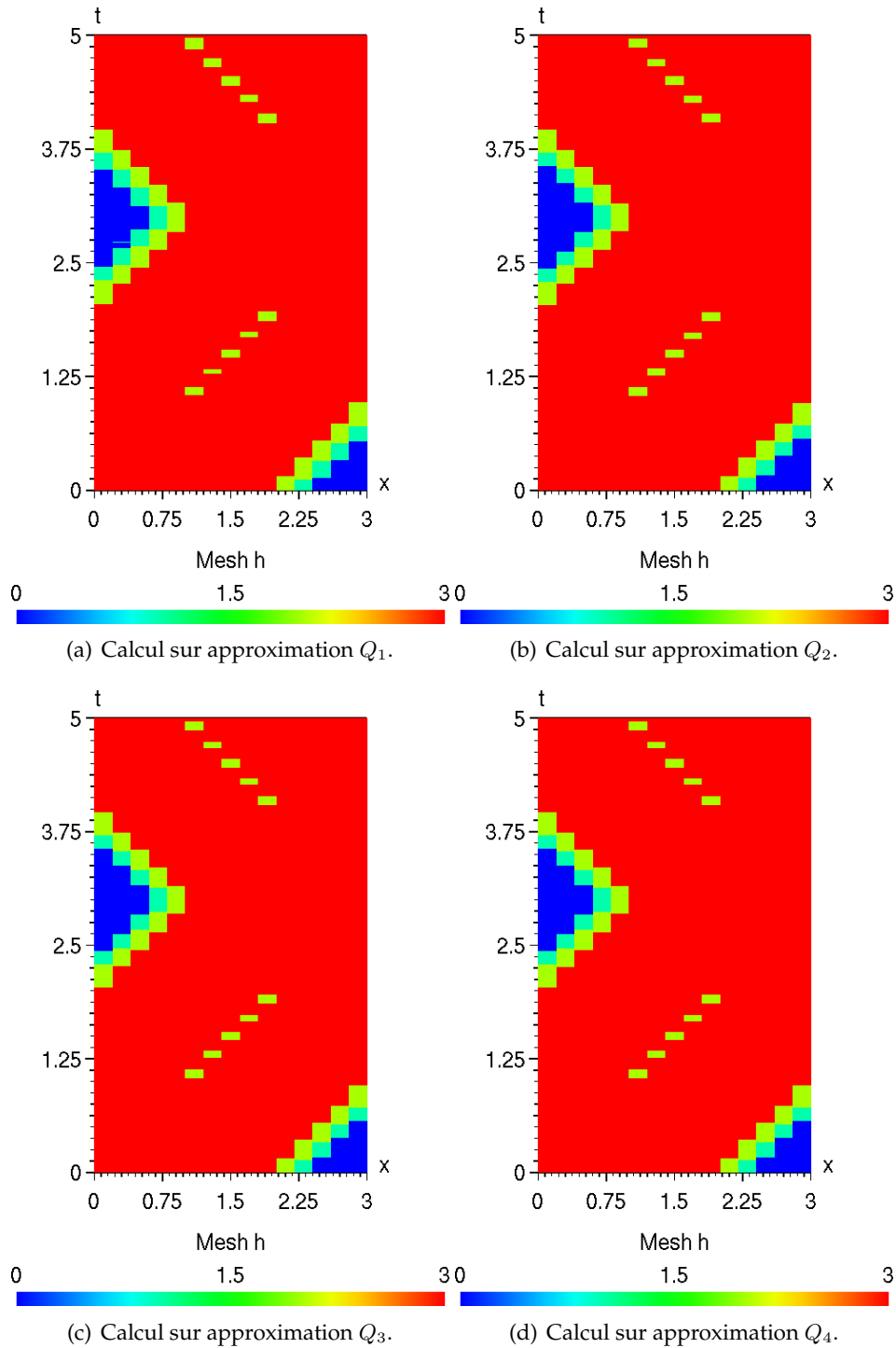


FIGURE 4.18: Évolution du maillage : flux centrés, $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$.

FIGURE 4.19: Évolution du maillage : flux décentrés, $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$.

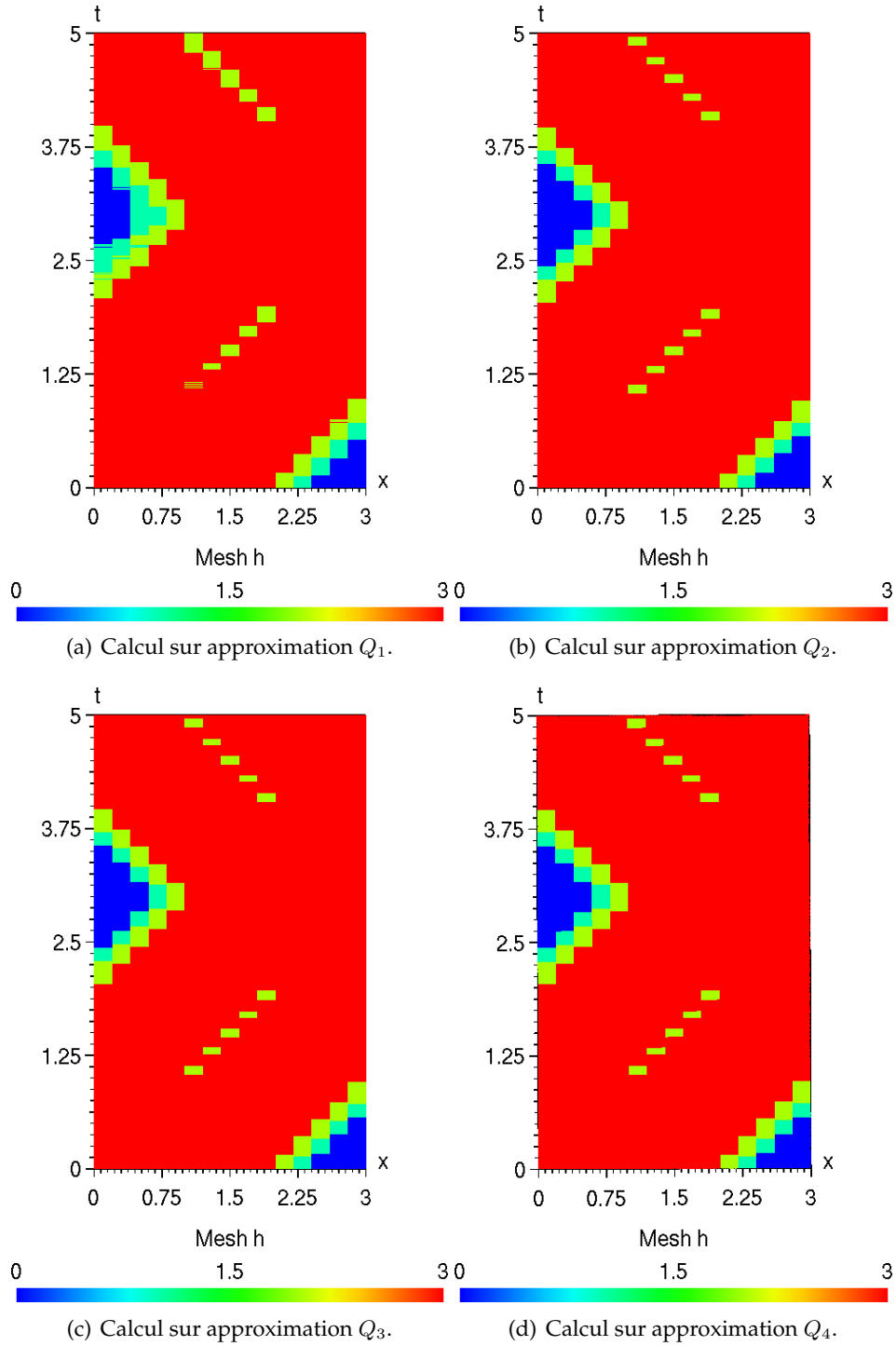


FIGURE 4.20: Évolution du maillage : flux décentrés partiels ($\lambda = 0.3$), $\eta_{\max} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$.

L'évolution des maillages reste comparable aux calculs pour $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$, avec une même localisation des zones raffinées et au même niveau.

TABLE 4.10: Performances des calculs pour $\eta_{\text{max}} = 1.e - 8$ et $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$ et $\epsilon_{\text{deraf}} = 1\%$.

(a) Performances du calcul en flux centrés.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1126.61	2186.64	4177.14	8535.49
Boucles	21.43	25.20	26.93	27.71
Nb d'inconnues moyen	224.38	329.73	440.18	549.78
Erreur	5.076e-4	1.105e-7	1.856e-8	8.208e-9
Surcalcul moyen	1207.84	3043.34	4551.40	6046.75

(b) Performances du calcul en flux décentrés, pour $\eta_{\text{max}} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1166.51	2226.27	4280.02	8670.68
Boucles	22.22	25.35	27.11	27.81
Nb d'inconnues moyen	220.28	329.70	440.19	549.78
Erreur	9.679e-6	2.633e-7	2.879e-7	3.114e-7
Surcalcul moyen	1202.15	3079.67	4612.85	6079.61

(c) Performances du calcul en flux partiellement décentrés, pour $\eta_{\text{max}} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1154.25	2223.55	4289.36	8624.54
Boucles	22.66	25.28	27.16	27.72
Nb d'inconnues moyen	219.61	329.67	440.17	549.75
Erreur	1.118e-4	1.229e-7	1.003e-7	1.102e-7
Surcalcul moyen	1135.65	3064.14	4614.66	6065.75

Premièrement, on constate que la modification de ce paramètre n'a pas fait perdre de précision à ce calcul. On peut observer une très légère amélioration dans certains cas qui est à corrélérer avec la très légère augmentation du nombre d'inconnues moyen (de l'ordre de 1%). Par contre, nous notons un gain significatif sur le temps CPU (réduction de l'ordre de 30% pour les ordres 2 à 4). Cette diminution va de pair avec la perte de 30% de boucles de raffinement/déraffinement effectuées. Cette dernière est directement liée au choix de la valeur du paramètre σ_{raf} . En effet, pour une valeur de σ_{raf} plus importante, nous sommes amenés à sélectionner au cours d'une boucle de raffinement/déraffinement plus d'éléments. Ainsi, le phénomène d'hystérésis est en partie « parallélisé » au sein de la boucle. Ceci est confirmé par le surcoût moyen qui reste globalement inchangé par rapport à celui obtenu pour $\sigma_{\text{raf}} = 10\%$. Le gain en temps calcul ne peut donc pas être réalisé sur le temps *leap-frog* et le temps estimateur, qui restent proportionnels au nombre total d'inconnues, mais plutôt sur la construction de Π et la gestion des maillages, liés quant à eux au nombre de boucles.

Pour le cas-test Q_1 , comme expliqué précédemment, le nombre de boucles est faible car il semble qu'il y ait peu d'hystérésis, l'estimateur *a posteriori* ayant du mal à converger vers la valeur seuil de déraffinement. Ainsi, le nombre de cellules potentiellement à déraffiner est *a priori* faible et elles sont déjà simultanément prises en compte pour une valeur de σ_{raf} à 10%.

Test cumulé : $\epsilon_{\text{deraf}} = 0,1\%$ et $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$

Nous essayons d'observer maintenant l'effet cumulé des meilleurs choix sur les deux paramètres étudiés précédemment : $\epsilon_{\text{deraf}} = 0,1\%$ et $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$

TABLE 4.11: Performances des calculs pour $\eta_{\text{max}} = 1.e - 8$, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$ et $\epsilon_{\text{deraf}} = 0,1\%$.

(a) Évolution du maillage : $\eta_{\text{max}} = 1.e - 8$, flux centrés, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1107.13	1577.96	2495.03	4718.94
Boucles	21.18	21.65	21.92	21.98
Nb d'inconnues moyen	224.36	329.72	440.21	549.77
Erreur	5.322e-4	1.067e-7	1.814e-8	7.947e-9
Surcalcul moyen	1189.71	2207.69	3003.12	3945.10

(b) Évolution du maillage : $\eta_{\text{max}} = 1.e - 8$, flux décentrés, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	984.84	1666.32	2674.42	4936.92
Boucles	19.36	22.53	22.81	22.63
Nb d'inconnues moyen	220.48	329.71	440.20	549.77
Erreur	9.659e-6	2.662e-7	2.974e-7	3.170e-7
Surcalcul moyen	945.31	2290.69	3179.77	4073.98

(c) Évolution du maillage : $\eta_{\text{max}} = 1.e - 8$, flux décentrés partiels, $\sigma_{\text{raf}} = 30\%$.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1049.06	1590.23	2674.16	4905.84
Boucles	20.77	21.30	22.67	22.57
Nb d'inconnues moyen	219.64	329.67	440.19	549.74
Erreur	1.102e-4	1.240e-7	1.039e-7	1.053e-7
Surcalcul moyen	1023.27	2188.53	3163.85	4065.01

Nous voyons tout d'abord que la précision des différents calculs reste tout à fait comparable, en affichant peut-être le même léger gain que dans le choix de σ_{raf} à 30% par rapport au cas-test initial. De même, le nombre d'inconnues et le surcalcul moyen sont globalement inchangés. Enfin, nous observons un gain sur le nombre de boucles par rapport à chacun des deux cas vus précédemment. Ceci se traduit par une diminution claire des coûts calcul. Il semblerait donc que l'action combinée de ces choix de paramètres ait diminué le phénomène d'hystérésis. Ces gains sont moins perceptibles pour le Q_1 pour les raisons détaillées auparavant.

Lissage du raffinement

Afin d'aller plus loin dans la limitation du phénomène d'hystérésis, nous nous intéressons à une étude développée dans le cas des éléments finis, en particulier [40, 41].

Un autre effet du raffinement pointé par Demkovicz est la concentration des efforts, c'est-à-dire le fait que les valeurs de l'estimateur soient très importantes sur un ensemble localisé de quelques cellules, impliquant de raffiner fortement cet ensemble et de causer une grande différence de niveau de raffinement et donc de pas spatial entre des cellules voisines. Cela aurait pour conséquence de voir apparaître des phénomènes de réflexion qui nuirait à la précision de la solution.

Aussi allons-nous introduire une option de « lissage » du raffinement. Une fois l'analyse de l'estimateur menée et les cellules marquées à raffiner, nous considérons les cellules du voisinage non marquées comme à raffiner avec un niveau moindre, et ce récursivement jusqu'à ce que de maille en maille, la différence d'échelle n'excède pas un certain ratio. Cette idée est illustrée dans la figure 4.21. Le nouvel algorithme d'adaptation de maillage est donc donné par le pseudo-code 3.

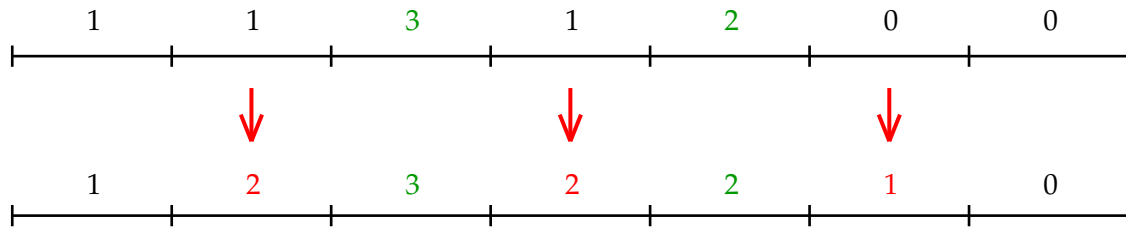


FIGURE 4.21: Procédure de recalcul : les niveaux de raffinements définis après marquages (haut) et résultat de la procédure de lissage (bas).

Avec cette option, nous espérons une convergence plus rapide de l'algorithme d'adaptation, car elle force le marquage d'un ensemble plus large de cellules, diminuant ainsi les erreurs numériques et donc le nombre de boucles à chaque pas de temps. Le nombre d'itérations devrait donc être réduit au profit du calcul effectif.

Nous reprenons à nouveau l'exemple de calcul vu dans la section 4.3.3.4 en ajoutant cette fois-ci l'option de lissage du raffinement. Le tableau 4.12 donnent les performances de ces calculs pour $\eta_{\max} = 1.e - 8$ et $\epsilon_{\text{deraf}} = 0.1\%$ pour limiter l'hystérésis comme vu précédemment.

On observe ici une perte de précision sur les résultats utilisant l'option de lissage. Ceci peut s'expliquer par la contrainte imposée par l'algorithme 3 sur les voisins quand l'algorithme 2 préférerait pour chaque maille systématiquement la plus raffinée en fin de boucle. Ce dernier induisait alors *a priori* un espace plus riche et donc potentiellement une solution plus précise. Par contre, on peut observer une nette baisse du temps de calcul (jusqu'à 50%) corrélée à une diminution du nombre de surcalcul moyen. Ceci s'explique par une réduction des cas autorisés par l'algorithme au sein d'une boucle par l'algorithme de lissage. Le nombre d'éléments à raffiner dans une itération de la boucle sera donc *a priori* largement moins important. Ceci entraîne alors une augmentation du nombre de boucles à effectuer (+30%) sans potentiellement converger vers la solution optimale car limité par endroits au seuil maximum de raffinement atteint.

```

Input :  $\eta_{\max} > 0, \epsilon_{\text{deraf}} \geq 0, 0 < \sigma_{\text{raf}} < 1$ 
 $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \leftarrow (\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ 
Initialiser  $\eta = 2\eta_{\max}$ 
Marquer toutes les cellules à recalculer
while  $\eta > \eta_{\max}$  do
    Calcul des champs  $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}})$  à partir de  $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ 
    Calcul de l'estimateur sur chaque cellule  $\{\eta_{\mathcal{K}_i}\}_i$  et de l'estimateur global  $\eta$  à partir
    des champs  $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$  et  $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}})$ 
    if  $\eta > \eta_{\max}$  then
        Tri des valeurs  $\{\eta_{\mathcal{K}_i}\}_i$ 
         $P \leftarrow 1, S \leftarrow \eta_{\mathcal{K}_1}^2$ 
        while  $S < \sigma_{\text{raf}}\eta^2$  do
             $P \leftarrow P + 1, S \leftarrow S + \eta_{\mathcal{K}_P}^2$ 
        end
        Raffiner les cellules  $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_P)$ 
        Corriger si besoin les niveaux de raffinement des cellules voisines
         $p \leftarrow N$ 
        while  $\eta_{\mathcal{K}_p} < \epsilon_{\text{deraf}}$  do
            Déraffiner  $\mathcal{K}_p$ 
            Corriger si besoin les niveaux de raffinement des cellules voisines
             $p \leftarrow p - 1$ 
        end
        Construire  $\Pi$  à partir des nouvelles approximations sur les cellules  $\{\mathcal{K}_i\}$ 
         $(\check{\mathbf{E}}^n, \check{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}}) \leftarrow \Pi(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ 
    end
end

```

Algorithme 3 : Pseudo-code de l'algorithme de raffinement/déraffinement du maillage avec option de lissage du raffinement.

TABLE 4.12: Performances des calculs sur maillage adaptatif avec option de lissage du raffinement.

(a) Performances du calcul en flux centrés.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1103.25	1643.04	2603.24	5483.16
Boucles	31.40	38.61	38.80	39.46
Nb d'inconnues moyen	207.11	298.10	395.04	497.68
Erreur	6.650e-2	7.797e-6	5.671e-7	3.959e-7
Surcalcul moyen	1182.10	2140.47	2866.75	3923.53

(b) Performances du calcul en flux décentrés.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	983.49	1689.09	2837.99	5839.89
Boucles	39.28	39.62	40.44	40.51
Nb d'inconnues moyen	212.12	293.95	388.65	495.76
Erreur	2.017e-2	1.011e-5	5.118e-7	2.873e-7
Surcalcul moyen	969.84	2170.70	3040.61	4067.72

(c) Performances du calcul en flux décentrés partiels.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
t_{CPU}	1034.22	1630.57	2825.13	5859.23
Boucles	35.07	38.74	40.36	40.90
Nb d'inconnues moyen	214.77	292.50	395.53	493.30
Erreur	2.587e-2	1.115e-5	4.999e-7	3.154e-7
Surcalcul moyen	1013.10	2086.29	3027.32	4106.26

4.3.3.5 Bilan et pistes d'améliorations

Nous avons pu voir au travers de l'exemple 1D étudié qu'il était possible de mettre en œuvre une méthode d'adaptation de maillage pour la résolution par schéma Galerkin discontinu des équations de Maxwell instationnaire. Ainsi, à partir d'un maillage grossier donné, elle arrive à focaliser les zones de raffinement et déraffinement de sorte à retrouver une précision numérique comparable à celle obtenue sur le maillage le plus fin. Toutefois, les constantes définissant l'efficacité et la fiabilité de l'estimateur *a posteriori* étant inconnues, les seuils à adopter s'avèrent évidemment difficiles à déterminer.

Par comparaison avec les méthodes équivalentes pour les résolutions de systèmes statiques, nous pouvons donc déterminer les paramètres principaux gérant à la fois la convergence et la répartition de l'effort numérique. Contrairement à ces cas statiques, dans le cas dynamique, le travail de recherche du meilleur espace d'approximation est *a priori* modifié pour chaque itération en temps et on cherche donc non pas un seul espace optimal mais une suite indexée par les itérations en temps de tels espaces. Ainsi, nous apportons une attention toute particulière aux coûts des cycles de recalcul des différents candidats au vu de l'explosion potentiellement significative qu'ils engendrent sur les temps calcul. Nous avons alors vu qu'un bon choix des paramètres, à précision de calcul égale, nous permettait de réduire de manière importante ce nombre de cycles et par la même occasion les temps de calculs globaux. En particulier, il semble intéressant de choisir une valeur du paramètre de raffinement σ_{raf} relativement importante afin de « paralléliser » une partie du traitement des raffinements/déraffinements. Par ailleurs, même si *a priori* engendrant une surprécision potentiellement inutile, un choix faible du paramètre de déraffinement ϵ_{deraf} permet d'économiser là encore d'importants surcoûts aux boucles de raffinements/déraffinements.

Enfin, il est apparu l'introduction de deux éléments propres à la problématique d'adaptation instationnaire et induisant des limitations en termes d'efficacité : la gestion dynamique des maillages et les opérations de projection de condition initiale. Ces deux éléments sont liés au besoin de mémoire sur l'espace d'approximation afin de pouvoir calculer le terme source que représente la solution au temps précédent. Nous avons alors pu observer sur notre exemple qu'une mauvaise implémentation du premier et une formulation complexe du second se traduisaient par une explosion des temps calculs d'autant plus visible que l'on utilise des ordres élevés. Des pistes algorithmiques issues du traitement adaptatif des inconnues en éléments finis auto-raffinés peuvent être envisagés pour améliorer la gestion des maillages. Une réduction significative des coûts de la projection des conditions initiales est quant à elle prévisible dans le cas de l'utilisation de la définition de l'opérateur sans contraintes telle qu'introduite dans le cas du schéma GD3D.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à différentes problématiques autour de la définition des méthodes de raffinement auto-adaptatives pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires. Plus précisément, nous avons considéré la simulation numérique effectuée à partir d'un schéma Galerkin discontinu pour lequel l'espace d'approximation (le maillage et le degré des fonctions de base polynomiales) pouvait être modifié de façon locale au cours du calcul. Nous avons alors mis en avant plusieurs difficultés liées à la modification de ces espaces, à leur caractère local, ou enfin au choix de ceux-ci.

Dans un premier temps, nous avons choisi d'analyser l'impact sur la qualité de la résolution du changement d'espace d'approximation au cours du calcul. À travers un exemple bien choisi sur les équations de Maxwell 1D, nous avons pu mettre en évidence l'importance du choix de la méthode utilisée pour prendre en compte ce changement d'espace. Il est ainsi apparu que l'utilisation de méthodes d'interpolation « classiques » (Lagrange ou moindres carrés) pour transporter une solution calculée d'un ancien espace d'approximation vers le nouveau pouvait engendrer des instabilités. En introduisant la dépendance à l'itération en cours sur l'espace d'approximation et en reprenant l'étude de stabilité du schéma Galerkin discontinu utilisé nous avons alors montré que, même en respectant la condition CFL, la stabilité dans ces cas n'était plus garantie. De ce résultat et de la recherche de précision sur la simulation, nous en avons alors déduit deux conditions à satisfaire par l'opérateur effectuant ce transport entre les espaces afin de retrouver un caractère stable et consistant. Nous avons proposé sur le système 1D pour le schéma GD utilisé un tel opérateur dont il a été prouvé qu'il vérifiait asymptotiquement les deux contraintes. Cet opérateur étant défini par résolution d'un problème d'optimisation, le critère de convergence utilisé correspondait ici au résidu de sa construction. Par ailleurs, une estimation *a posteriori* optimale avec des constantes exactes mesurant l'erreur introduite par l'utilisation de cet opérateur a été donnée. En repassant les différents cas-tests illustrant le phénomène d'instabilité nous avons pu montrer que ce dernier était complètement éliminé par l'utilisation de notre opérateur. Ces travaux ont alors été généralisés au schéma Galerkin discontinu considéré pour les équations de Maxwell instationnaires en 3D. Dans ce cadre, les mêmes résultats de convergence asymptotique et d'estimation *a posteriori* optimale ont pu être démontrés. Enfin, à partir de ce dernier résultat, nous avons donné une définition de la condition CFL nécessaire pour la simulation en 3D sur le schéma GD dans le cas d'un espace d'approximation pouvant être modifié au cours du temps.

La deuxième partie de ce travail s'est focalisée sur l'introduction dans la méthode Galerkin discontinu d'espaces d'approximation non-conformes. Nous entendons par là l'utilisation de maillages non-conformes au sens des éléments finis (par exemple par l'utilisation d'octree), d'ordre polynomial pouvant changer d'une cellule à l'autre, ou encore les deux simultanément. La structure du schéma Galerkin discontinu se prêtant naturellement à l'utilisation de telles descriptions, nous avons donc commencé par expliciter leurs prises en compte dans le cas du schéma utilisé pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires en 3D. Afin d'éviter que cette méthode ne génère des phénomènes d'ondes parasites, nous avons opté pour l'utilisation d'espaces d'approximation « rendus conformes », c'est-à-dire choisis de sorte à garantir l'égalité des espaces de trace de part et d'autre d'une frontière donnée entre cellules. Afin de ne pas perdre les bonnes propriétés du schéma initial, nous montrons qu'il est possible d'évaluer la solution dans ce nouvel espace à partir du calcul non-conforme en définissant un opérateur de projection adapté. Pour expliciter ce dernier, nous passons alors à la résolution 2D des équations de Maxwell en mode TM avec un schéma Galerkin discontinu *leap-frog* en temps utilisant des fonctions de base de Gauss-Lobatto. Après avoir constaté la persistance de ce phénomène pour ce cas, nous construisons les opérateurs de projection nécessaires pour les gestions de non-conformités en p sur une ou plusieurs faces d'un élément, en h sur un côté, et leur hybridation pour la non-conformité $h - p$.

Enfin, la dernière partie de ce travail a porté sur l'évaluation de la mise en place d'une stratégie d'adaptation automatique. Nous avons ainsi dans un premier temps considéré un estimateur *a posteriori* développé de manière statique pour le schéma Galerkin discontinu utilisé en tant qu'estimateur *a posteriori* pour une itération en temps donnée de la résolution du problème instationnaire. Sur un exemple 1D, nous avons pu constater en comparant à l'erreur son bon comportement. À partir de là, nous avons proposé la mise en œuvre d'une stratégie d'adaptation automatique pour le cas 1D. Dans la construction de cette méthode, nous avons utilisé le principe de Huygens et la compacité du support des fonctions de base du schéma Galerkin discontinu pour localiser les phases de recalcul de la solution et de l'estimateur *a posteriori* au sein d'une même boucle de test de raffinement/déraffinement. Une étude paramétrique nous a alors permis d'observer le comportement en précision et les coûts inhérents à cette stratégie. Nous en avons par la suite déduit des pistes d'améliorations portant en particulier sur la réduction du phénomène d'hystérésis raffinement/déraffinement/raffinement, la construction de l'opérateur d'interpolation de condition initiale et enfin la gestion du maillage.

Perspectives

Des résultats obtenus dans ce travail, nous en déduisons plusieurs pistes de poursuites ou d'amélioration futures.

Dans un premier temps, l'application de l'ensemble de ce travail au cas du schéma GD3D reste à faire. Toutefois, l'opérateur d'interpolation de « condition initiale » est déjà défini pour ce schéma et on espère pourvoir réutiliser les résultats de l'étude paramétrique menée au cours du développement de la stratégie d'adaptation de maillage. Il reste donc à formuler la projection sur un espace conforme à partir des fonctions de base de Gauss dans

les cas non-conformes h, p ou $h - p$; la forme générale de l'opérateur effectuant la correction des solutions étant déjà donnée. La difficulté pour le schéma GD3D réside dans le fait que toutes les fonctions de base contribuent à l'espace de trace sur une frontière donnée.

Une deuxième perspective est liée à l'utilisation des résultats de contrôle *a posteriori* de l'erreur de consistance introduite par l'utilisation de l'opérateur d'interpolation de « condition initiale ». Nous avons déjà proposé via ce résultat un choix de CFL naturelle pour l'adaptation dynamique d'espace d'approximation. Ce choix se traduit par la redéfinition du pas de temps à chaque itération en fonction des espaces précédents et en cours d'utilisation amènent donc une évolution dynamique du pas de temps, ce qui n'a pas été exploité jusqu'à présent. Cet aspect permettrait alors d'optimiser les temps calcul en ne fixant pas *a priori* un pas de temps suffisamment petit pour pouvoir garantir la stabilité sur toutes les configurations $h - p$ envisagées. Par ailleurs, le contrôle de la consistance pourrait être introduit comme une partie de l'estimateur *a posteriori* pour évaluer la précision du schéma à une itération donnée. En effet, quand le second donne une estimation de l'erreur induite par l'avancée sur un pas de temps du schéma à partir des données projetées, le premier traduit l'écart entre le projeté utilisé pour faire ce calcul et la solution au temps précédent. Ainsi, quand un choix d'espace très pauvre pourrait fournir une estimation *a posteriori* faible par oubli de l'essentiel de la solution au temps précédent, le contrôle de la consistance sur l'opérateur d'interpolation de « condition initiale » quantifierait cette perte et disqualifierait donc cet espace candidat. Enfin, le chaînage des estimations d'erreurs entre l'interpolation de « condition initiale » et l'étape de résolution décrit la divergence entre la solution numérique et la solution exacte au cours de l'ensemble des itérations. On pourrait donc espérer en cumulant ces estimations démontrer formellement, d'une part, que l'utilisation d'un estimateur *a posteriori* statique est effectivement correct pour la résolution d'un système dynamique et, d'autre part, que l'ensemble du processus automatique est convergent.

Une autre perspective potentielle concerne l'utilisation des conclusions tirées de l'analyse paramétrique de la stratégie auto-adaptative pour une application en 3D. En effet, nous avons pu mettre en évidence plusieurs points potentiellement limitatifs par rapport à ce type de stratégie pour la résolution de systèmes instationnaires. Ainsi, dans un premier temps, nous pourrions envisager de nouveaux moyens pour limiter à la fois le phénomène d'hystérésis et les surcoûts qu'il induit. Parmi celles-ci, deux pistes possibles sont tout d'abord l'introduction d'une méthode de lissage des choix de raffinement/déraffinement au cours temps afin de réduire les possibilités de variations en h et en p trop violentes entre deux pas de temps consécutifs (et donc de réduire l'ensemble des configurations explorées) et d'autre part de limiter l'occurrence à la boucle de raffinement/déraffinement, par exemple en ne la déclenchant que si la valeur de l'estimation *a posteriori* calculée dépasse, d'un seuil à fixer, les valeurs précédentes pour l'espace utilisé. Un second temps serait alors de réduire l'un des coûts apparus comme importants dans cette étude, qui concerne la gestion de l'historique des espaces d'approximation utilisés. Une piste intéressante serait de proposer un système d'indexation global des inconnues qui puisse être remis à jour en cas de raffinement ou déraffinement sans avoir alloué et désalloué les tableaux correspondants. Cela nécessite en particulier une structure simple et efficace permettant les correspondances entre les numérotations sur les deux pas de temps consécutifs afin de calculer l'interpolation d'une condition initiale pour une solution dans le premier système de numérotation vers le second.

La dernière partie des perspectives liées à ce travail concerne la gestion des espaces

d'approximation non-conformes. Comme nous l'avons introduit au chapitre 2, l'utilisation de tels espaces présente en elle-même un bon nombre d'intérêts, mais on peut encore étendre ces considérations à l'utilisation de maillages composés d'éléments de type différents (hybrides hexaèdres/tétraèdres). Une telle configuration traduit alors potentiellement du point de vue du schéma numérique l'emploi de fonctions de base de natures différentes par élément (fonctions Q_k sur les éléments hexaédriques et P_k sur les tétraèdres). Cette situation décrit ainsi à nouveau une non-conformité sur l'espace d'approximation ; en effet, les fonctions de base de part et d'autre de la frontière commune à deux éléments de natures différentes ne se tracent pas *a priori* dans le même espace. La motivation pour envisager une telle configuration provient des limitations des outils de maillage actuellement à notre disposition. Il est ainsi courant pour le traitement de géométries complexes qu'un logiciel sollicité pour effectuer un maillage hexaédrique (non structuré), afin de satisfaire à des contraintes de courbure locale, restitue certains éléments sous forme de tétraèdres (simplexes). Ainsi, la méthode de correction des non-conformités d'espace nous permettrait de modifier l'hybridation entre les schémas Galerkin discontinus définis sur chaque couple élément/fonctions de base pour laquelle on observe souvent des oscillations parasites. Par extension, certains schémas pouvant être réinterprétés sous forme Galerkin discontinu (différences finies, éléments finis), nous pouvons espérer mettre en œuvre une méthode efficace pour l'hybridation entre le Galerkin discontinu et ceux-ci.

Bibliographie

- [1] M. ABRAMOVITZ et I. STEGUN : *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications Inc., juin 1965.
 - [2] S. ADJERID et M. BACCOUCH : Asymptotically exact a posteriori error estimates for a one-dimensional linear hyperbolic problem. *Applied Numerical Mathematics*, 60(2010): 903–914, mai 2010.
 - [3] S. ADJERID, K. DEVINE, J. FLAHERTY et L. KRIVODONOVA : A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin solutions of hyperbolic problems. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(11-12):1097–1112, 2002.
 - [4] S. ADJERID et T. WEINHART : Discontinuous Galerkin error estimation for linear symmetric hyperbolic systems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 198(2009):3113–3129, juin 2009.
 - [5] J. ADLER, T. MANTEUFFEL, S. MCCORMICK, J. NOLTING, J. RUGE et L. TANG : Efficiency based adaptive local refinement for first-order system least-squares formulation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(1):1–24, jan. 2011.
 - [6] M. AINSWORTH : Dispersive and dissipative behaviour of high order discontinuous Galerkin finite element methods. *Journal of Computational Physics*, 2004(198):106–130, 2004.
 - [7] M. AINSWORTH et J. T. ODEN : *A posteriori error analysis estimation in finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2000.
 - [8] F. ASSOUS, P. DEGOND, E. HEINTZÉ, P. RAVIART et J. SEGRÉ : On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations. *Journal of Computational Physics*, 109(2):222–237, 1993.
 - [9] P. AYOUD : *Étude de schémas explicites pour les équations de Maxwell 3D avec multiplicateur de Lagrange et éléments finis conformes*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.
 - [10] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBLDT : A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615, 1978.
 - [11] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBLDT : Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 18:736–754, 1978.
 - [12] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBLDT : A posteriori error analysis of finite element solutions for one dimensional problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 18:5659–589, 1981.
-

-
- [13] I. BABUŠKA, O. ZIENKIEWICZ, J. GAGO et E. OLIVEIRA : *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*. Wiley, 1986.
 - [14] R. BANK et A. WEISER : Some a posteriori error estimates for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computations*, 44:283–301, 1985.
 - [15] E. BÄNSCH, F. KARAKATSANI et C. MAKRIDAKIS : A posteriori error control for fully discrete Crank-Nicolson schemes. *in preparation*, juil. 2011.
 - [16] E. BÄNSCH, F. KARAKATSANI et C. MAKRIDAKIS : The effect of mesh modification in time on the error control of fully discrete approximations for parabolic equations. *Applied Numerical Mathematics*, sept. 2011.
 - [17] J. BARANGER et H. EL-AMRI : Estimateurs a posteriori d’erreur pour le calcul adaptatif d’écoulements quasi-Newtoniens. *RAIRO Analyse numérique*, 25:231–48, 1991.
 - [18] M. BERGOT : *Éléments finis d’ordre élevé pour maillages hybrides*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 2010.
 - [19] P. B. BOCHEV, K. PETERSON et C. M. SIEFFERT : Analysis and computation of compatible least-squares methods for div-curl equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 49(1):159–181, fév. 2011.
 - [20] P. BONNET : *Résolution des équations de Maxwell instationnaires et harmoniques par une technique de volumes finis. Application à des problèmes de compatibilité électromagnétique*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, nov. 1998.
 - [21] Y. BOURGAULT, M. PICASSO, F. ALAUZET et A. LOSEILLE : On the use of anisotropic a posteriori error estimators for the adaptative solution of 3D inviscid compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, p. 1–6, 2000.
 - [22] D. BRAESS et R. VERFÜRTH : Posteriori error estimators for the Raviart-Thomas element. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 6(33):2431–2444, 1996.
 - [23] H. BRÉZIS : *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, 1987.
 - [24] K. BRIX, R. MASSJUNG et A. VOSS : Refinement and connectivity algorithms for adaptive discontinuous Galerkin methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(1):66–101, fév. 2011.
 - [25] A. BUFFA, M. COSTABEL et D. SHEEN : On traces for $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ source in Lipschitz domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 276:845–867, déc. 2002.
 - [26] A. CANGELLARIS et D. WRIGHT : Analysis of the Numerical Error Caused by the Stair-Stepped Approximation of a Conducting Boundary in FDTD Simulations of Electromagnetic Phenomena. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39(10):1518–1525, 1991.
 - [27] C. CARSTENSEN : A posteriori error estimate for the mixed finite element method. *Mathematics of Computations*, 218(66):465–476, 1997.
 - [28] C. CARSTENSEN et G. DOLZMANN : A posteriori error estimates for mixed finite element method in elasticity. *Numerical Mathematics*, 2(81):187–209, 1998.
 - [29] W. CECOT, L. DEMKOVICZ et W. RACHOWICZ : Three-dimensional infinite element for Maxwell’s equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57:899–921, 2003.
 - [30] P. CIARLET : *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Company, 1978.
-

-
- [31] S. COCHEZ-DHONDT et S. NICAISE : Robust a posteriori error estimation for the Maxwell equations. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2583–2595, 2007.
- [32] B. COCKBURN : A simple introduction to error estimation for nonlinear hyperbolic conservation laws. In *Proceedings of the 1998 EPSRC Summer School in Numerical Analysis, SSCM*, in : *The Graduate Student's Guide for Numerical Analysis*, vol. 26, p. 1–46, 1999.
- [33] B. COCKBURN et P. GREMAUD : Error estimates for finite element methods for nonlinear conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, p. 522–554, 1996.
- [34] G. COHEN et M. DURUFLÉ : Non-spurious spectral-like element methods for Maxwell's equations. *Journal of Computational Mathematics*, 25(3):282–304, 2007.
- [35] G. COHEN, X. FERRIERES et S. PERNET : A spatial high-order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time domain. *Journal of Computational Physics*, 217:340–363, 2006.
- [36] R. DAUTRAY et J. L. LIONS : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris, 1985.
- [37] J.-P. DEMAILLY : *Analyse numérique et Équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.
- [38] L. DEMKOVICZ, J. ODEN et T. STROUBOLIS : Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. Part I : Variational principles and a posteriori error estimates. *Computational Methods Applied in Mechanical Engineering*, 77:79–112, 1984.
- [39] L. DEMKOVICZ, J. ODEN et T. STROUBOLIS : *An adaptive p-version finite element method for transient flow problems with moving boundaries*. Wiley, 1985.
- [40] L. DEMKOVICZ, D. PARDO et W. RACHOWICZ : 3D hp-adaptive finite element package (3Dhp90). Rap. tech., TICAM, 2002.
- [41] L. DEMKOWICZ, W. RACHOWICZ et P. DEVLOO : A fully automatic hp-adaptivity. *Journal of Scientific Computing*, 17:117–142, 2002.
- [42] T. DEVEZE, L. BEAULIE et W. TABBARA : A fourth order scheme for the FDTD algorithm applied to Maxwell's equations. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, juil. 1992.
- [43] C. DUROCHAT : *Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2013.
- [44] H. FAHS : *Méthodes de type Galerkin discontinu d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires sur des maillages simplexes non conformes*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, déc. 2008.
- [45] H. FAHS, S. LANTERI et F. RAPETTI : Étude de stabilité d'une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non conformes. *Rapport INRIA*, juil. 2006.
- [46] J. FANG : *Time Domain Finite difference computation for "Maxwell's" equations*. Thèse de doctorat, University of California, 1989.
- [47] W. GUI et I. BABUŠKA : The h , p , and $h - p$ versions of the finite element method in 1 dimension, Part I. The error analysis of the p -version. *Numerical Mathematics*, 49:577–612, 1986.
-

-
- [48] W. GUI et I. BABUŠKA : The h , p , and $h - p$ versions of the finite element method in 1 dimension, Part II. The error analysis of the h and $h - p$ version. *Numerical Mathematics*, 49:613–957, 1986.
- [49] W. GUI et I. BABUŠKA : The h , p , and $h - p$ versions of the finite element method in 1 dimension, Part III. The adaptive hp version. *Numerical Mathematics*, 49:659–683, 1986.
- [50] R. HARTMANN et P. HOUSTON : Adaptive discontinuous Galerkin finite element methods for nonlinear hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 24:979–1004, 2002.
- [51] C. HAZARD et M. LENOIR : On the solution of time-harmonic scattering problem for Maxwell's equations. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 27:1597–1630, 1996.
- [52] J. S. HESTHAVEN et T. WARBURTON : *Nodal Discontinuous Galerkin Methods : Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer, Springer Verlag édn, 2008.
- [53] J. HOFFMAN : Adaptive finite element methods for the unsteady Maxwell's equations. In *Chalmers Finite Element Center Preprints*. Chalmers University of technology, 2000–2001.
- [54] L. HORESH et E. HABER : A second order discretization of Maxwell's equations in the quasi-static regime on octree grids. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 33(5):2805–2822, oct. 2011.
- [55] P. HOUSTON, J. MACKENZIE, E. SÜLI et G. WARNECKE : A posteriori error analysis for numerical approximations of Friedrichs systems. *Numerische Mathematik*, 82:433–470, 1999.
- [56] P. HOUSTON, I. PERUGIA et D. SCHÖTZAU : Energy-norm a posteriori error estimates for mixed discontinuous Galerkin approximations of the Maxwell operator. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19:499–510, 2005.
- [57] P. HOUSTON, I. PERUGIA et D. SCHÖTZAU : An a posteriori error indicator for discontinuous Galerkin discretizations of $H(\text{curl})$ -elliptic partial differential equations. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 27:127–150, 2007.
- [58] P. HOUSTON, D. SCHÖTZAU et T. WIHLE : Energy norm a posteriori error estimation of hp -adaptive discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17:33–62, 2007.
- [59] J. JAFFRE, C. JOHNSON et A. SZEPESSY : Convergence of the discontinuous Galerkin finite element method for hyperbolic conservation laws. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 5:367–386, 1995.
- [60] B. JANSEN et G. KANSCHAT : Adaptive multilevel methods with local smoothing. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 33(4):2095–2114, août 2011.
- [61] P. JOLY et J. RODRIGUEZ : A new Space-time Mesh Refinement method for elastodynamics. In *Proceedings of the 4th European congress on computational methods in applied sciences and Engineering*, juil. 2004.
- [62] H. W. KUHN et A. W. TUCKER : Nonlinear programming. In H. W. KUHN et A. W. TUCKER, éds : *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, p. 481–492, 1951.
- [63] G. KUNERT et S. NICAISE : Zienkiewicz-Zhu error estimators on anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(6):1013–1043, 2003.
-

-
- [64] M. LARSON et T. BARTH : A posteriori error estimation for adaptive discontinuous Galerkin approximation of hyperbolic systems. In SPRINGER, éd. : *Proc. International Symposium on Discontinuous Galerkin Methods Theory, Computation and Applications*, Berlin, 2000. B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.W. Shu.
- [65] P. LASCAUX et R. THÉODOR : *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tome 1 : Méthodes directes*, vol. 1. Dunod, 2004.
- [66] J. LI : A posteriori error estimation for an interior penalty discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations in cold plasma. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 1(1):107–124, 2009.
- [67] X. LI, J.-F. REMACLE, N. CHEVAUGEON et M. S. SHEPHARD : Anisotropic Mesh Gradation Control. In *13th International Meshing Roundtable*, 2004.
- [68] T. LU, P. ZHANG et W. CAI : Discontinuous Galerkin methods for dispersive and lossy Maxwell's equations and PML boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 2004(200):549–580, 2004.
- [69] P. MONK : A posteriori error indicators for Maxwell's equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 100:173–190, 1998.
- [70] E. MONTSENY, S. PERNET, X. FERRIÈRES et G. COHEN : Dissipative terms and local time-stepping improvements in a spatial high order Discontinuous Galerkin scheme for the time-domain Maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 2008.
- [71] E. MONTSENY, S. PERNET, X. FERRIÈRES, M. ZWEERS, G. COHEN et B. PECQUEUX : A Discontinuous Galerkin Method To Solve Maxwell Equations In Time Domain. In *The Applied Computational Electromagnetics Society*, 2007.
- [72] P. MORIN, R. NOCHETTO et K. SIEBERT : Data oscillation and convergence of adaptive FEM. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 38:466–488, 2000.
- [73] P. MORIN, R. NOCHETTO et K. SIEBERT : Convergence of adaptive finite element methods. *SIAM Reviews*, 44:631–658, 2002.
- [74] K. MUSTAPHA : The hp - and h -versions of the discontinuous and local discontinuous Galerkin methods for one-dimensional singularly perturbed models. *Applied Numerical Mathematics*, 61(12):1223–1236, août 2011.
- [75] J.-C. NÉDÉLEC : Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerical Mathematics*, 35:315–341, 1980.
- [76] J.-C. NÉDÉLEC : A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerical Mathematics*, 50:57–81, 1986.
- [77] S. NICAISE : On Zienkiewicz-Zhu error estimators for Maxwell's equations. *Compte-rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 2005.
- [78] D. PARDO, L. DEMKOVICZ, C. TORRES-VERDÍN et M. PASZYNSKI : A self-adaptive goal-oriented hp -adaptive finite element method with electromagnetic applications. Part II : Electrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:3585–3597, août 2007.
- [79] D. PARDO, L. DEMKOVICZ, C. TORRES-VERDÍN et M. TABAROVSKY : A goal-oriented hp -adaptive finite element method with electromagnetic applications. Part I : Electrostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:1269–1309, 2006.
- [80] J. PERAIRE, M. VAHDATI, K. MORGAN et O. ZIENKIEWICZ : Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, 72:449–466, 1987.
-

-
- [81] S. PERNET : *Étude de méthodes d'ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell, dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique*. Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine-Paris IX, 2004.
- [82] S. PERNET : Rapport d'avancement T0+6 pour la tâche 2 du projet DIGATOP : Mise au point d'un estimateur a posteriori pour FEMGD. Rap. tech., CERFACS, Toulouse, déc. 2009.
- [83] S. PERNET : Rapport d'avancement T0+12 pour la tâche 2 du projet DIGATOP : Mise au point d'un estimateur a posteriori pour FEMGD. Rap. tech., CERFACS, Toulouse, juin 2010.
- [84] S. PERNET et X. FERRIERES : *hp a priori error estimates for a non-dissipative spectral discontinuous Galerkin method to solve the Maxwell equations in the time domain*. *Mathematics of Computation*, 76:1801–1832, 2007.
- [85] S. PIPERNO, M. REMAKI et L. FEZOU : A non-diffusive finite volume scheme for the 3D Maxwell equations on unstructured meshes. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 39(6):2089–2108, 2002.
- [86] S. PRUDHOMME, J. T. ODEN, T. WESTERMANN, J. BASS et M. E. BOTKIN : Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:1193–1224, 2003.
- [87] J. RAUCH : Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 291(1), sept. 1985.
- [88] M. REMAKI : A new finite volume scheme for solving Maxwell system. Rap. tech. 3725, INRIA, 1999.
- [89] J. SCHÖBERL : A posteriori error estimates for Maxwell equations. *Mathematics of Computations*, 77:633–649, 2008.
- [90] M. SPIVAK : *Calculus*. Publish or Perish, 4^e édn, 2008.
- [91] L. TANG : *Efficiency-based hp-refinement for finite element methods*. Thèse de doctorat, University of Waterloo, Waterloo, 2007.
- [92] P. TARDIN : Électromagnétisme : Étude d'une approximation Galerkin Discontinue des équations de Maxwell dans le domaine temporel. Rap. tech., INRIA, juil. 2000.
- [93] R. VERFÜRTH : A posteriori error estimators for the Stokes equations. *Numerical Mathematics*, 55:309–325, 1989.
- [94] R. VERFÜRTH : A posteriori error estimates for nonlinear problems. Finite element discretizations of elliptic equations. *Mathematics of Computations*, 62:445–475, 1994.
- [95] R. VERFÜRTH : *A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques*. Wiley, Teubner-Wiley édn, 1996.
- [96] J. XU et Z. ZHANG : Analysis of recovery type a posteriori error estimators for mildly structured grids. *Mathematics of Computations*, 73(247):1139–1152, 2003.
- [97] K. S. YEE : Numerical Solution of Initial Value Problems of Maxwell's Equations. *IEEE transactions on antennas and propagations*, 14:302–307, 1966.
- [98] X. ZHAO, S. MAO et Z. SHI : Adaptive finite element methods on quadrilateral meshes without hanging nodes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(4):2099–2120, juil. 2010.
- [99] O. ZIENKIEWICZ et J. ZHU : A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 24:337–357, 1987.
-

Titre : Raffinements locaux auto-adaptatifs dans une méthode Galerkin discontinu pour la résolution des équations de Maxwell.

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions différents points nécessaires afin de pouvoir proposer une stratégie d'adaptation dynamique de maillage pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode Galerkin discontinu. Après avoir mis en évidence numériquement la création d'une instabilité par l'action du changement d'espace d'approximation au cours du calcul liée au choix de l'opérateur utilisé pour effectuer l'interpolation entre deux espaces successifs, nous explicitons ce phénomène dans le cas 1D. Un nouvel opérateur d'interpolation est alors proposé, puis validé numériquement, pour lequel nous démontrons qu'il permet de retrouver asymptotiquement consistance et stabilité pour le schéma. L'extension de l'ensemble de ces résultats au cas 3D est réalisée. La deuxième partie de ce travail s'intéresse à la prise en compte dans le schéma Galerkin discontinu de non-conformités de maillages (au sens des éléments finis) et/ou d'ordres variables. Afin d'éviter d'éventuelles ondes parasites pouvant être générées dans ce cas, nous cherchons à retrouver une résolution dans un espace d'approximation conforme. Ceci est effectué en définissant un opérateur de correction permettant alors de conserver les avantages liés à la construction du schéma sur l'espace non-conforme. Cet opérateur est explicité dans le cas Maxwell 2D Transverse Magnétique. Enfin, dans la dernière partie, nous mettons en œuvre et analysons une stratégie de raffinements auto-adaptative dans le cas 1D afin d'essayer d'en tirer des considérations pratiques pour envisager le passage au 3D.

Mots-clés : Galerkin discontinu, équations de Maxwell, adaptation dynamique de maillage, approximations $h - p$ non-conformes.

Title : Self-adaptive local refinements for discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations.

Abstract : This thesis is devoted to study some keypoints in order to propose a self-adaptive refinement method for the numerical resolution of time-domain Maxwell's equations with a discontinuous Galerkin scheme. We first put into light numerically an instability phenomenon due to the interpolation operator taking account for the modification of the approximation space from one step to another. This is explained in the 1D case. Then, a new operator is proposed and shown to retrieve asymptotically consistency and stability for the scheme. This has thus been extended to the 3D case. Second part of this work deals with non-conformity on mesh (in the finite element sense) or non-uniform polynomial order applied to the discontinuous Galerkin scheme. To avoid spurious waves that can be excited in such case, we aim at recover the solution from a conformal space. This is done by creating a cleaning operator that allows us to keep the benefits of our original scheme. Explicitation of this operator is given on the 2D Transverse Magnetic Maxwell's equations. Finally, the last part implements and analyses a self-adaptive refinement strategy in the 1D case, to draw conclusions in the future 3D application.

Keywords : discontinuous Galerkin, Maxwell's equations, self-adaptive refinement, non-conformal $h - p$ approximations.